

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

UPB
Universitatea
Politehnica
Timișoara

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul
de admitere din anul 2026 la

UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA

- 6 Lectia #6 - UPTeConnect
Universitatea Politehnica Timișoara
2:33:51
- 7 Lectia #7 - UPTeConnect
Universitatea Politehnica Timișoara
2:30:39
- 8 Lectia #3 - UPTeConnect
Universitatea Politehnica Timișoara
2:43:33
- 9 Lectia #10 - UPTeConnect
Universitatea Politehnica Timișoara
2:59:21
- 10 Lectia #12 - UPTeConnect
Universitatea Politehnica Timișoara
2:37:22



Editura POLITEHNICA - P

Colecția "LICEU"

**CULEGERE
DE PROBLEME
DE MATEMATICĂ**

**pentru examenul
de admitere din anul 2026 la**

**UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

**Culegere de probleme de matematică pentru examenul de admitere din
anul 2026 la Universitatea Politehnica Timișoara / Doru Păunescu,**

Romeo Negrea, Liviu Cădăriu, ... - Timișoara : Editura Politehnica, 2026

Conține bibliografie

ISBN 978-606-35-0683-3

I. Păunescu, Doru

II. Negrea, Romeo

III. Cădăriu, Liviu

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEȘANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIȘOR
NICOLAE LUPA

ROMEO NEGREA
GHEORGHE MOZA
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN
EMANUEL CISMAȘ

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

**pentru examenul
de admitere din anul 2026 la**

**UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

Colecția "LICEU"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA - 2026

Copyright © Editura Politehnica, 2026

Nicio parte din această lucrare nu poate fi reprodusă, stocată sau transmisă prin indiferent ce formă, fără acordul prealabil scris al Editurii Politehnica.

EDITURA POLITEHNICA

Bd. Republicii nr. 9
300159 Timișoara, România

E-mail: editura@upt.ro

Tel.: 0256.403822

Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 29.01.2026

Coli de tipar: 24

C.Z.U. 51

ISBN 978-606-35-0683-3

Tiparul executat sub comanda nr. 1
la Tipografia Universității Politehnica Timișoara

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultățile Universității Politehnica Timișoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competențelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conținuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educației Naționale. În același timp s-a ținut cont și de manualele de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deși problemele propuse sunt de tip grilă cu șase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv, prezenta culegere poate fi utilizată și la pregătirea examenului de Bacalaureat sau a unor concursuri școlare.

Ca structură, cartea are cinci părți: *Un rezumat al cunoștințelor dobândite la liceu, Probleme de algebră, Probleme de trigonometrie și geometrie plană, Probleme de analiză matematică, respectiv Subiectele date la admitere în ultimii ani cu rezolvările integrale.*

Rezumatul cunoștințelor dobândite în liceu e necesar absolvenților care vin din diverse licee cu pregătire matematică inegală. Mai mult, acest rezumat se va dovedi util studenților din anul întâi care vor avea astfel un punct de referință pentru valoarea adăugată de cursurile universitare. Problemele propriu zise se regăsesc în părțile doi, trei și patru ale volumului.

Autorii

Cuprins

UN REZUMAT AL CUNOȘTINȚELOR DOBÂNDITE LA LICEU	7
PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)	103
PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)	187
PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM)	203
ANEXE	
Subiectele date la admitere în ultimii ani cu rezolvările integrale	274
BIBLIOGRAFIE	377

UN REZUMAT AL CUNOȘTINȚELOR DOBÂNDITE LA LICEU

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat	9
Progresii aritmetice și progresii geometrice	9
Funcții	10
Principiul inducției matematice	12
Sume remarcabile (1)	12
Permutări, aranjamente, combinări	13
Binomul lui Newton	14
Sume remarcabile (2)	14
Funcții cu domeniul și codomeniul mulțimi finite	14
Permutări	15
Funcția de gradul întâi	15
Funcția de gradul al doilea	16
Funcțiile modul și signum	19
Funcția parte întreagă	20
Funcția parte fracționară	20
Puteri și radicali	21
Funcția exponențială	22
Funcția logaritmică	24
Polinoame și ecuații algebrice	26
Matrice și determinanți	30
Proprietățile determinantilor	33
Rangul unei matrice	34
Inversabilitatea matricelor pătratice	35
Sisteme de ecuații liniare	36
Structuri algebrice	38
$\mathbb{Z}_p$, inelul claselor de resturi modulo p	42

TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

Funcțiile trigonometrice	43
Relații între funcțiile trigonometrice	48
Funcțiile trigonometrice inverse	49
Ecuatiile trigonometrice elementare	51
Aplicațiile trigonometriei în geometrie	53
Numere complexe	56
Elemente de geometrie analitică	58

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Șiruri de numere reale	60
Limite remarcabile	62
Dreapta încheiată	64
B. Limite de funcții și funcții continue	65
Limite remarcabile	66
Prelungirea prin continuitate	67
Proprietăți ale funcțiilor continue	67
C. Funcții derivabile	68
Tabelul derivatelor. Reguli de derivare	70
Derivate de ordin superior	72
Aplicațiile derivatei	73
Regula lui l'Hospital	77
Ghid pentru reprezentarea grafică a funcțiilor	79
D. Integrabilitate și aplicații	89
Tabelul primitivelor elementare	90
Metode de integrare	92
Substituții remarcabile	93
Construcția integralei definite	95
Formula lui Leibniz-Newton, metode de integrare	97
Proprietățile integralei definite	98
Aplicații ale integralei definite în geometrie: arii și volume	101

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + b^2 \text{ nu se poate descompune în } \mathbb{R}$$

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) \text{ în } \mathbb{C}$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})}_{n \text{ termeni}}$$

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b) \underbrace{(a^{2p} - a^{2p-1}b + \dots - ab^{2p-1} + b^{2p})}_{2p+1 \text{ termeni}}$$

Progresii aritmetice și progresii geometrice

Progresia aritmetică

Progresia geometrică

	$\dot{\cdot} \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$	$\ddot{\cdot} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$
Term. gen.	$a_n = a_1 + r \cdot (n-1) \quad (r \neq 0)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (q \neq 0; 1)$
Rația	$r = a_{k+1} - a_k$	$q = \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad (b_k \neq 0)$
Suma	$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
	$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (S_1 = a_1)$	$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (S_1 = b_1)$
	$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad (b_1, q > 0)$

Funcții

Fie A și B două mulțimi nevide; se numește *funcție* definită pe A cu valori în B orice lege de corespondență (relație) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$.

Notăția " $f : A \rightarrow B, y = f(x)$ " se citește "funcția f definită pe A cu valori în B de relația $y = f(x)$ ".

Mulțimea A este domeniul de definiție al funcției f , iar mulțimea B reprezintă domeniul de valori sau codomeniul acesteia.

Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ poartă numele de *grafic* al funcției.

Funcții bijective

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *injectivă* dacă și numai dacă (prescurtat d.d.) este îndeplinită următoarea proprietate:

$$(\forall) x_1, x_2 \in A \text{ din } x_1 \neq x_2 \text{ rezultă } f(x_1) \neq f(x_2).$$

În practică, pentru dovedirea injectivității, această formă a definiției poate fi dificil de utilizat. Este preferată formularea (logic echivalentă)

$$(\forall) x_1, x_2 \in A \text{ din } f(x_1) = f(x_2) \text{ rezultă } x_1 = x_2.$$

Dacă există cel puțin o pereche de elemente x_1, x_2 din domeniul de definiție A cu $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$, atunci funcția f nu este injectivă.

Interpretarea geometrică a injectivității pentru funcții reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) este sugestivă:

$f : A \rightarrow B$ este injectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f în cel mult un punct.

Imaginea funcției $f : A \rightarrow B$ este submulțimea domeniului de valori B alcătuită din toate elementele de forma $y = f(x)$:

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid (\exists) x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}.$$

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *surjectivă* dacă și numai dacă $\text{Im}(f) = B$ sau, altfel spus,

$$(\forall) y \in B \text{ ecuația } y = f(x) \text{ are cel puțin o soluție } x \in A.$$

Interpretarea geometrică a surjectivității pentru funcții reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) :

$f : A \rightarrow B$ este surjectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f în cel puțin un punct.

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *bijectivă* d.d. f este injectivă și surjectivă.

Interpretarea geometrică a bijectivității pentru funcții reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) :

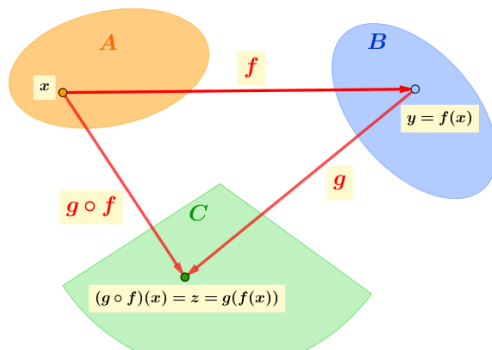
$f : A \rightarrow B$ este bijectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Compunerea funcțiilor

Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ definite prin relațiile $y = f(x)$, respectiv $z = g(y)$. Funcția ce asociază fiecărui element x din mulțimea A elementul $z = g(f(x))$ din mulțimea C se numește *funcție compusă* și se notează prin $g \circ f$. Mai precis, $g \circ f : A \rightarrow C$ este definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Evident, ordinea în care se efectuează operația de compunere nu este aleatoare, ci este bine determinată: domeniul de definiție al funcției g (pe prima poziție în expresia $g \circ f$) trebuie să coincidă cu domeniul de valori al funcției f (situată pe poziția secundă).



Funcții inversabile

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *inversabilă* dacă există o funcție $f^{-1} : B \rightarrow A$ ce verifică relațiile

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in B) \quad \text{și} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in A).$$

Funcția $f^{-1} : B \rightarrow A$, $x = f^{-1}(y)$ se numește *inversa* funcției $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$.

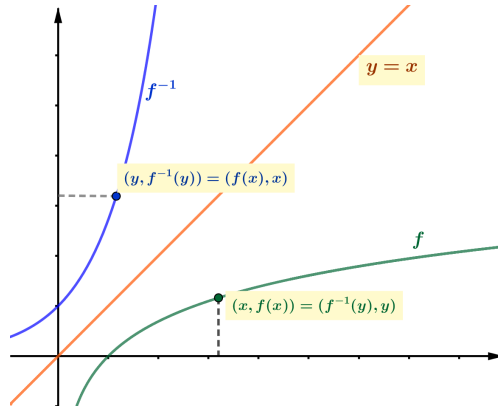
Teoremă

Funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă d.d. este bijectivă.

Interpretarea geometrică a inversabilității pentru funcții reale:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ este inversabilă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Graficele funcției f și a funcției inverse f^{-1} , reprezentate în același sistem de axe, sunt simetrice față de prima bisectoare.

**Principiul inducției matematice***Problemă*

Să se arate că propoziția $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$ ($n_0, n \in \mathbb{N}$).

Etapa I VERIFICAREA

Se dovedește că $\mathbf{P}(n_0)$ este adevărată.

Etapa a-II-a PASUL INDUCTIV

Presupunem că $\mathbf{P}(k)$ este adevărată.

Demonstrăm, utilizând presupunerea, că $\mathbf{P}(k+1)$ este adevărată.

În final, $\mathbf{P}(n_0)$ fiind adevărată (fapt verificat la etapa I), rezultă că $\mathbf{P}(n_0+1)$ este de asemenea adevărată (consecință a pasului inductiv). Mai departe, conform pasului inductiv, și propoziția $\mathbf{P}(n_0+2)$ este adevărată și așa mai departe, $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n = n_0 + m$, $m \in \mathbb{N}$.

Sume remarcabile (1)

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

Permutări, aranjamente, combinări

O mulțime finită se numește mulțime ordonată dacă există o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale. Altfel spus, spre deosebire de mulțime, unde nu contează ordinea elementelor, orice aranjare a elementelor în altă ordine creează o nouă mulțime ordonată.

P_n = "numărul mulțimilor ordonate de n elemente distincte ce se pot forma cu cele n elemente date."

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Prin convenție: $0! = 1$

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

A_n^m = "numărul mulțimilor ordonate de m elemente distincte ce se pot forma cu cele n elemente date, $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$."

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^0 = 1; \quad A_n^1 = n; \quad A_n^n = n!.$$

C_n^m = "numărul submulțimilor de m elemente ce se pot forma cu cele n elemente date, $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$."

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}; \quad C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!};$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}; \quad C_n^k = C_n^{n-k}$$

(formula combinărilor complementare).

$$k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}; \quad C_n^k = \frac{k+1}{n-k} \cdot C_n^{k+1};$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

$n = 1$				$1 \searrow$		$\swarrow 1$			C_1	
$n = 2$			$1 \searrow$		$\swarrow 2 \searrow$		$\swarrow 1$		C_2	
$n = 3$			1	3		3		1	C_3	
$n = 4$			1	4	6		4	1	C_4	
$n = 5$		1	5	10		10		5	1	C_5
$n = 6$	1	6	15	20		15	6	1	C_6	

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\ &= C_n^0 \cdot x^n \cdot y^0 + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + C_n^n \cdot x^0 \cdot y^n\end{aligned}$$
$$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k,$$

Sume remarcabile (2)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n,$$
$$\begin{aligned} C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \dots &= 0 \\ C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots &= 2^{n-1} \\ C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ și $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ două mulțimi cu m și respectiv n elemente (distincte), iar $f : X \rightarrow Y$ o funcție arbitrară.

a) Numărul funcțiilor $f : X \rightarrow Y$ este n^m .

b) Dacă $m \leq n$, atunci numărul funcțiilor injective $f : X \rightarrow Y$ este A_n^m .

Dacă $m > n$, atunci nu pot exista funcții injective $f : X \rightarrow Y$.

c) Dacă $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă, atunci $m = n$.

Dacă $m = n$ și $f : X \rightarrow Y$ este injectivă, atunci $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă.

Dacă $m = n$ și $f : X \rightarrow Y$ este surjectivă, atunci $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă.

Numărul funcțiilor bijective $f : X \rightarrow Y$ este $P_n = n!$.

În particular, o funcție bijectivă $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se numește *permutare* de gradul n . Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează S_n și conține $n!$ elemente.

Dacă i și j sunt elemente distincte din $\{1, 2, \dots, n\}$, atunci permutarea τ_{ij} definită prin $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ și $\tau_{ij}(k) = k$ pentru $k \neq i, j$ se numește *transpoziție*. Numărul tuturor transpozițiilor de ordinul n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ și coincide cu numărul perechilor ordonate (i, j) , cu $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Orice permutare σ de ordin n cu $n \geq 2$ se poate reprezenta ca produs de transpoziții.

Fie i și j elemente distincte din $\{1, 2, \dots, n\}$; perechea ordonată (i, j) cu $i < j$ se numește *inversiune* a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul tuturor inversiunilor permutării σ se notează $inv(\sigma)$, iar $sign(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$ se numește *signatura* (*semnul*) permutării.

Permutarea σ este pară, respectiv impară, după cum signatura sa $sign(\sigma)$ este $+1$ sau -1 . În particular, orice transpoziție este o permutare impară.

Funcția de gradul întâi

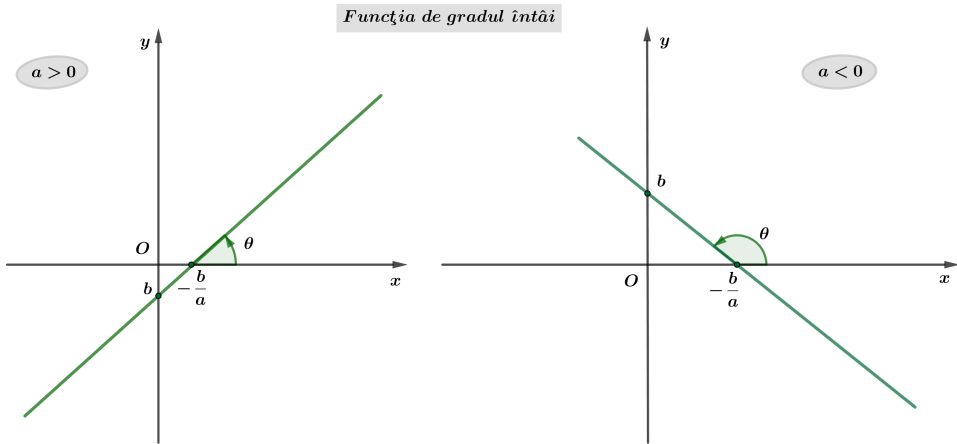
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R})$$

Graficul funcției de gradul întâi este dreapta $y = ax + b$ ce taie axele de coordonate în punctele $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ și $(0, b)$.

Soluția ecuației de gradul întâi $ax + b = 0$ este abscisa punctului în care graficul funcției intersectează axa Ox : $x = -\frac{b}{a}$.

Numărul a , coeficientul director al funcției de gradul întâi, este panta dreptei $y = ax + b$ și reprezintă tangenta unghiului θ pe care dreapta îl face cu semiaxa pozitivă Ox , măsurat în sens direct trigonometric: $a = \operatorname{tg} \theta$.

Semnul coeficientului director a determină monotonia funcției.



Dacă $a < 0$, funcția f este strict descrescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Dacă $a > 0$, funcția f este strict crescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Semnul funcției de gradul întâi este constant pe intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ și $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$; practic, semnul funcției este determinat de semnul coeficientului director a .

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	semn contrar lui a		semnul lui a

Funcția de gradul al doilea

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R})$$

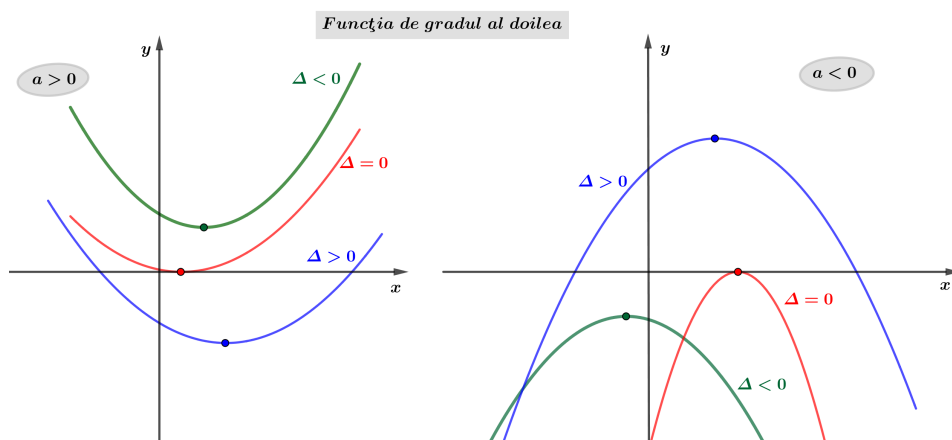
Forma canonică a expresiei de gradul al doilea se obține prin izolarea variabilei x într-un pătrat perfect:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad \text{unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Graficul funcției de gradul al doilea este o parabolă având vârful în punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ și axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$, paralelă cu Oy . Parabola intersectează axa Oy în punctul $(0, c)$.

Dacă $a > 0$, vârful V este punct de *minim* al graficului funcției, iar dacă $a < 0$, atunci vârful V este punct de *maxim* al graficului funcției.

Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc *intervale de monotonie* ale funcției de gradul al doilea.



Intersecția cu axa Ox depinde însă de natura soluțiilor ecuației de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$:

i) Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația *nu are soluții reale*, iar parabola (graficul funcției de gradul al doilea) nu intersectează axa Ox .

ii) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația *are o singură soluție reală* (dublă) $x = -\frac{b}{2a}$, iar parabola este tangentă axei Ox .

iii) Dacă $\Delta > 0$, atunci $ax^2 + bx + c$ se descompune¹ după cum urmează:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{unde} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$

ecuația *are două soluții reale distincte*, x_1 și x_2 , abscisele punctelor în care parabola intersectează axa Ox .

¹Formula de descompunere rămâne valabilă chiar dacă $\Delta < 0$; în acest caz $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-(-\Delta)} = i\sqrt{-\Delta}$ iar soluțiile $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sunt numere complexe.

Semnul funcției de gradul al doilea este determinat de poziția graficului (a parabolei) față de axa Ox . Cele șase situații descrise mai sus evidențiază rolul coeficientului director a și al discriminantului Δ în studiul semnului. Practic, funcția de gradul al doilea are semnul coeficientului director a cu o singură excepție: dacă discriminantul Δ este strict pozitiv; în acest caz, *pe intervalul situat între soluții, funcția are semn contrar lui a .*

i) Dacă $\Delta < 0$, atunci funcția de gradul al doilea are același semn pe întreaga axă reală:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	

ii) Dacă $\Delta = 0$, atunci funcția de gradul al doilea are același semn pe întreaga axă reală cu excepția unui singur punct, în care se anulează:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	0	semnul lui a

iii) Dacă $\Delta > 0$, atunci funcția de gradul al doilea își schimbă semnul la trecerea prin soluții:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

Relațiile lui Viète evidențiază legăturile ce există între coeficienții și soluțiile ecuației de gradul al doilea, indiferent dacă acestea sunt reale sau complexe:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P &= x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

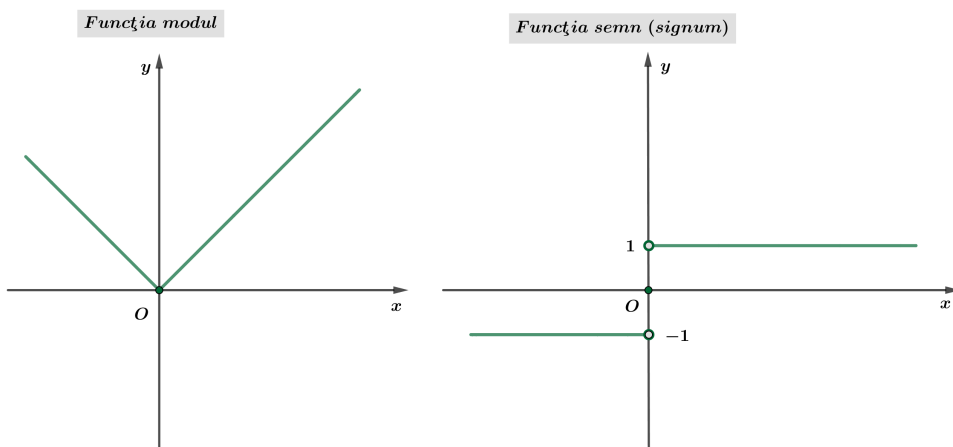
Cu ajutorul sumei $S = x_1 + x_2$ și a produsului $P = x_1 x_2$ putem construi întotdeauna ecuația de gradul al doilea cu soluțiile date x_1 și x_2 :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Funcțiile modul și signum

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$



Proprietățile modului

- i) $|x| \geq 0$ și $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (modulul este pozitiv definit)
- ii) $\frac{|x|}{x} = \text{sign}(x) \quad (x \neq 0)$
- iii) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$ (modulul este multiplicativ)
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului)
- iv) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Funcția modul este *continuă* în origine *fără a fi însă derivabilă* în acest punct:

$$f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1.$$

Funcția semn este *discontinuuă* în origine; $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța întâi:

$$f(0-0) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(0+0) = 1.$$

Funcția parte întreagă

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

$[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x

Proprietățile părții întregi

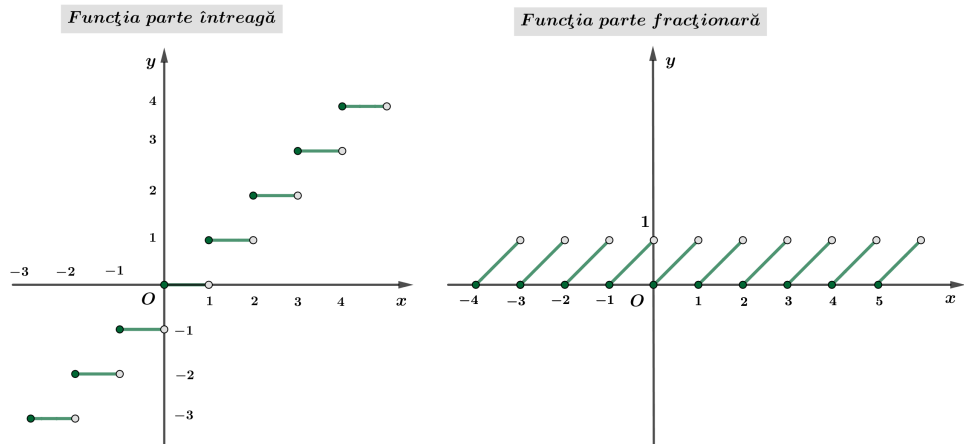
- i) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$
- ii) $[x + n] = n + [x] \quad (n \in \mathbb{Z})$

Funcția parte întreagă este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n - 0) = n - 1 \quad \text{și} \quad f(n) = f(n + 0) = n$$

Punctele de abscisă întreagă sunt discontinuități de speța întâi.

Funcția parte întreagă este continuă la dreapta în fiecare punct de abscisă întreagă.



Funcția parte fracționară

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1), \quad f(x) = \{x\}$$

$\{x\} = x - [x]$ este partea fracționară a lui x

Funcția parte fracționară este periodică cu perioada principală $T = 1$:

$$\{x + k\} = \{x\} \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, \quad (\forall) k \in \mathbb{Z}$$

Funcția parte fracționară este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n-0) = 1 \quad \text{și} \quad f(n) = f(n+0) = 0$$

Puteri și radicali

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n$ a numărului pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $z^{2n} = a$ și se notează prin $\sqrt[n]{a}$.

Conform acestei definiții, pentru numerele pozitive a și z , are loc echivalența

$$\sqrt[n]{a} = z \iff z^{2n} = a.$$

Convenim să notăm rădăcina pătrată (rădăcina de ordinul al doilea) simplu prin $\sqrt{}$ în loc de $\sqrt[2]{}$.

Observație

Rădăcina de ordinul doi a numărului 4 este 2, deoarece doar una din rădăcinile ecuației

$$z^2 = 4 \iff z_{1,2} = \pm 2$$

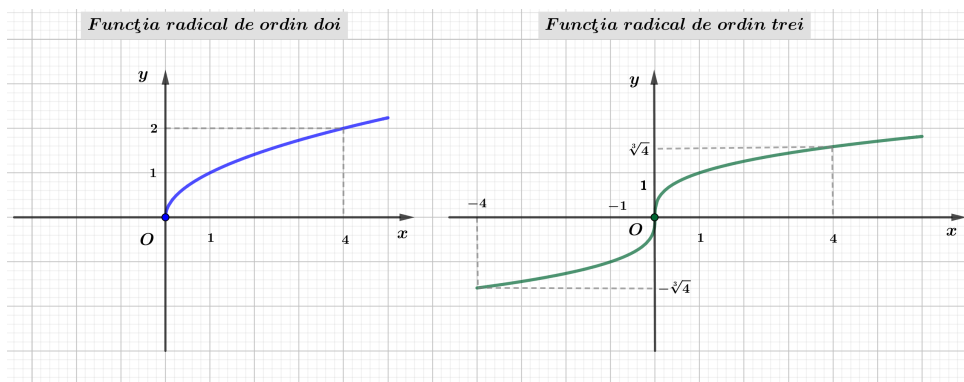
este pozitivă; prin urmare $\sqrt{4} = +2$. Exprimarea $\sqrt{4} = \pm 2$ este greșită în contextul extragerii rădăcinii reale.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[n+1]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n + 1$ a numărului real a este unica soluție reală a ecuației $z^k = a$ și se notează prin $\sqrt[n+1]{a}$:

$$\sqrt[n+1]{a} = z \iff z^{2n+1} = a.$$

Definiția rădăcinii de ordinul k poate fi extinsă și în cazul numerelor negative dacă indicele k este impar, $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).



Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este tangentă vericală la graficul funcției radical. Originea $O(0,0)$ este punct de inflexiune cu tangenta verticală la graficul funcției radical de ordin impar.

Proprietățile puterilor și radicalilor

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}} \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad \sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Funcția exponențială

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty))$$

Funcția exponențială cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (1, \infty): \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

În plus, au loc relațiile:

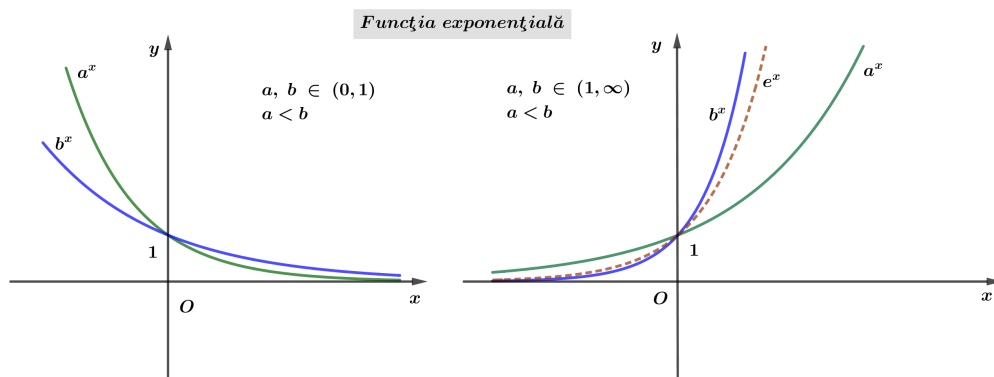
$$\begin{aligned} x < 0 \text{ și } 1 < a < b &\Rightarrow a^x > b^x \\ x > 0 \text{ și } 1 < a < b &\Rightarrow a^x < b^x . \end{aligned}$$

Funcția exponențială cu baza subunitară este strict descrescătoare:

$$\text{pentru } a \in (0, 1) : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} .$$

În plus, au loc relațiile:

$$\begin{aligned} x < 0 \text{ și } 0 < a < b < 1 &\Rightarrow a^x > b^x \\ x > 0 \text{ și } 0 < a < b < 1 &\Rightarrow a^x < b^x . \end{aligned}$$



Proprietățile funcției exponențiale

(i) Proprietăți de calcul

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} ; \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} ; \\ (a^x)^y &= a^{x \cdot y} ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} . \end{aligned}$$

(ii) Funcția exponențială este *bijectivă* deoarece este injectivă, adică

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2} \quad (\text{echivalent } a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2),$$

și surjectivă, adică

$$(\forall) y \in (0, +\infty) \quad (\exists) x \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad y = a^x.$$

Prin urmare funcția exponențială este *inversabilă*, iar *inversa* ei este funcția logaritmică cu aceeași bază (vezi paragraful ce urmează).

(iii) Dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la graficul funcției exponențiale. În cazul funcției exponențiale cu baza $e = 2, 718\,281 \dots$, limitele la extremități sunt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

Funcția logaritmică

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_a x \quad \left(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty) \right)$$

Logaritmul unui număr pozitiv x calculat în baza a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) se notează $\log_a x$ și reprezintă puterea la care trebuie ridicată baza a pentru a obține x .

Conform acestei definiții, pentru numerele strict pozitive x și a , $a \neq 1$, are loc echivalența

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Logaritmi cel mai des întâlniți în practică sunt *logaritmul zecimal* ($\log_{10}$) pentru calcule numerice și *logaritmul natural* ($\log_e$), cu baza $e = 2, 718\,281 \dots$, la capitolul de Analiză matematică. Pentru simplitatea scrierii se utilizează notațiile

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{și} \quad \log_e x = \ln x.$$

Funcția logaritmică cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (1, \infty) : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

În plus, au loc relațiile:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \quad \text{și} \quad 1 < a < b &\Rightarrow \log_a x < \log_b x \\ x > 1 \quad \text{și} \quad 1 < a < b &\Rightarrow \log_a x > \log_b x. \end{aligned}$$

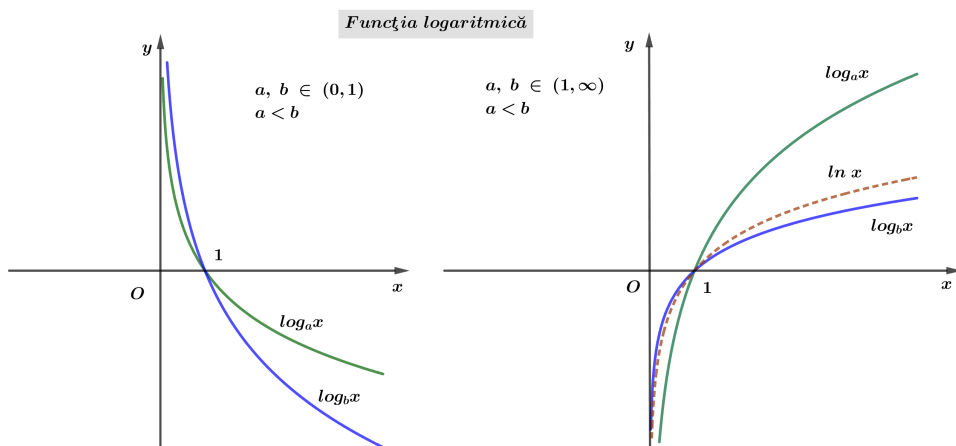
Funcția logaritmică cu *baza subunitară* este *strict descrescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (0, 1) : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 .$$

În plus, au loc relațiile:

$$0 < x < 1 \text{ și } 0 < a < b < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_b x$$

$$x > 1 \text{ și } 0 < a < b < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_b x .$$



Proprietățile funcției logaritmice

(i) Proprietăți de calcul

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad ; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad ;$$

$$\log_a 1 = 0 \quad ; \quad \log_a a = 1 \quad ;$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x \quad ; \quad \log_{a^r} x = \frac{1}{r} \log_a x \quad ;$$

$$\log_a \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \log_a x \quad ; \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad .$$

(ii) Funcția logaritmică este *bijectivă* deoarece este injectivă,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2 \quad (\text{echivalent } \log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2),$$

și surjectivă,

$$(\forall) y \in \mathbb{R} \quad (\exists) x \in (0, +\infty) \quad \text{a.î. } y = \log_a x.$$

Prin urmare funcția logaritmică este *inversabilă*, iar *inversa* ei este funcția exponențială cu aceeași bază.

$$\begin{aligned}a^{\log_a x} &= x & (\forall) x \in (0, +\infty) \\ \log_a(a^y) &= y & (\forall) y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Graficele celor două funcții sunt simetrice față de prima bisectoare.

(iii) Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul funcției logaritmice. În cazul logaritmului natural, limitele la extremități sunt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

(iv) Formulele de schimbare a bazei logaritmilor

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \quad ; \quad \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \quad ;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Polinoame și ecuații algebrice

Împărțirea polinoamelor. Divizibilitate.

$f, g \in \mathbb{C}[X]$ polinoame având gradele $n = \text{grad}(f)$ și respectiv $m = \text{grad}(g)$

$$n \geq m \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f : g &= c \text{ rest } r & \text{unde } \text{grad}(r) < m \\ \text{grad}(c) &= n - m \end{aligned}$$

Teorema împărțirii cu rest

$$f : g = c \text{ rest } r \quad \text{d.d.} \quad f = g \cdot c + r \quad (\text{proba împărțirii})$$

Polinomul f este *divizibil* prin g dacă și numai dacă $r \equiv 0$ (citește: r este polinomul identic nul sau, mai precis, coeficienții restului r sunt toți nuli). Polinoamele f și g sunt *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1 (se notează: $(f, g) = 1$).

Teorema lui Bézout

Restul împărțirii lui f prin $(x - a)$ este $r = f(a)$.

Dacă $f(a) = 0$, atunci a se numește *rădăcină* a polinomului f .

Consecințe

a) f este divizibil prin $(x - a) \iff f(a) = 0$

b) f este divizibil prin $g \iff$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini (cu multiplicități identice) pentru f .

Teorema fundamentală a algebrei

Orice polinom cu coeficienți complecși are cel puțin o rădăcină complexă.

Consecință

Orice polinom $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{C}[X]$, $a_0 \neq 0$, are exact n rădăcini complexe $x_1, x_2, \dots, x_n$ (distincte sau nu) și prin urmare se descompune în factori primi de gradul întâi:

$$f = a_0(X - x_1)^{n_1} \cdot (X - x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (X - x_k)^{n_k}$$

unde $n_1, n_2, \dots, n_k$ reprezintă multiplicitățile rădăcinilor distincte $x_1, x_2, \dots, x_k$, cu $k \leq n$.

Relațiile lui Viète

$$gr(f) = 2 \Rightarrow f = a_0X^2 + a_1X + a_2, a_0 \neq 0,$$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2) = a_0X^2 - a_0(x_1 + x_2)X + a_0x_1x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 &= \frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

$$gr(f) = 3 \Rightarrow f = a_0 X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3, a_0 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} f &= a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \\ &= a_0 X^3 - a_0(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_0(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)X - a_0 x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= \frac{a_2}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 &= -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$$gr(f) = 4 \Rightarrow f = a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4, a_0 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} f &= a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) \\ &= a_0 X^4 - a_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)X^3 + a_0(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 &= \frac{a_2}{a_0} \quad \heartsuit \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 &= -\frac{a_3}{a_0} \quad \diamond \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= \frac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

$$\heartsuit \text{ se scrie mai convenabil: } x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\diamond \text{ se scrie mai convenabil: } x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -\frac{a_3}{a_0}$$

Tipuri speciale de ecuații de grad superior

a) *Ecuații binome*

$$x^n - a = 0$$

- se scrie a sub formă trigonometrică: $a = r(\cos t + i \sin t)$

- se extrage rădăcina complexă de ordinul n :

$$x_k \in \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right) \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} \right\}$$

b) Ecuații bipătrate și tripătrate

$$x^4 + ax^2 + b = 0 \quad \text{substituția} \quad x^2 = y$$

$$x^6 + ax^3 + b = 0 \quad \text{substituția} \quad x^3 = y$$

c) Ecuații reciproce

- Ecuația reciprocă de gradul 3

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

admite soluția $x_1 = -1$.

Se aplică schema lui Horner și se obține o ecuație de gradul doi.

- Ecuația reciprocă de gradul 4

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Prin împărțirea cu x^2 rezultă $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, echivalent, după gruparea termenilor

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Se face substituția $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Se rezolvă ecuația redusă: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$.

Se revine la variabila x rezolvând ecuațiile de gradul al doilea: $x + \frac{1}{x} = t_1$

și $x + \frac{1}{x} = t_2$.

- Ecuația reciprocă de gradul 5

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

admite soluția $x = -1$.

Se aplică schema lui Horner și se obține o ecuație reciprocă de gradul 4:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & a & b & c & c & b & a \\ -1 & a & b-a & -b+a+c & b-a & a & 0 \end{array}$$

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

d) Ecuații cu coeficienți întregi

$$\begin{aligned} f &= 0 & f &\in \mathbb{Z}[X] \\ a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n &= 0 \end{aligned}$$

Rădăcinile întregi ale lui f se află printre divizorii termenului liber a_n .

Rădăcinile raționale se află printre fracțiile $\frac{p}{q}$, unde

$$\begin{aligned} p &\text{ este divizor al termenului liber } a_n \\ q &\text{ este divizor al coeficientului director } a_0 \end{aligned}$$

e) Ecuații cu coeficienți raționali

$$\begin{aligned} f &= 0 & f &\in \mathbb{Q}[X] \\ a + b\sqrt{q} & & (a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0, q \text{ nu este pătrat perfect}) \end{aligned}$$

Dacă $x_1 = a + b\sqrt{q}$ este rădăcină pentru f , atunci $x_2 = a - b\sqrt{q}$ este de asemenea rădăcină pentru f , caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - b\sqrt{q})(X - a + b\sqrt{q}) = (X - a)^2 - b^2q.$$

f) Ecuații cu coeficienți reali

$$\begin{aligned} f &= 0 & f &\in \mathbb{R}[X] \\ a + ib & & (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0) \end{aligned}$$

Dacă $x_1 = a + ib$ este rădăcină pentru f , atunci $x_2 = a - ib$ este de asemenea rădăcină pentru f , caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - ib)(X - a + ib) = (X - a)^2 + b^2.$$

Matrice și determinanți

Matricea este un tabel de numere (reale sau complexe), numite elementele matricei, identificate prin poziția pe care acestea le ocupă: elementul notat a_{ij} se găsește la intersecția liniei i cu coloana j .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{ij} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj-1} & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Matricea A este o matrice dreptunghiulară de tipul $m \times n$ deoarece are m linii și n coloane. Se notează cu $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$. Dacă numărul de linii coincide cu numărul de coloane ($m = n$), spunem că A este o matrice pătratică (matrice pătrată) de ordinul n . Notăția $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semnifică mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din $\mathbb{R}$.

Operații cu matrice

- *adunarea* matricelor de același tip: $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$;
- *înmulțirea cu un scalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$): $\alpha \cdot [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$;
- *înmulțirea matricelor* se realizează după regula ”linie $\times$ coloană”:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{l=1}^p a_{il}b_{lj}.$$

Înmulțirea este posibilă doar dacă numărul coloanelor primei matrice $[a_{ik}] \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ este egal cu numărul liniilor celui de-a doua matrice $[b_{kj}] \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$:

$$[a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = \left[\sum_{l=1}^p a_{il}b_{lj} \right].$$

De exemplu, produsul matricei A având trei linii și două coloane ($m = 3, p = 2$) cu matricea B formată din două linii și patru coloane ($p = 2, n = 4$) este matricea $C = A \cdot B$ cu trei linii și patru coloane ($m = 3, n = 4$):

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Chiar dacă se poate calcula $A \cdot B$, în general $B \cdot A$ nu are sens. Mai mult, în cazul matricelor pătratice, deși produsele $A \cdot B$ și $B \cdot A$ au ambele sens, în general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Cu alte cuvinte, produsul matricelor pătratice nu este o operație comutativă.

Matricea nulă $\mathbf{0}$, matricea cu toate elementele egale cu 0, este element neutru la adunarea matricelor.

Matricea pătratică de ordinul n având toate elementele nule cu excepția celor situate pe diagonala principală, care sunt egale cu 1, se notează I_n și este numită *matricea unitate* de ordinul n . Matricea I_n este element neutru la înmulțirea matricelor pătratice.

Determinantul unei matrice pătratice este numărul (real sau complex) calculat după regula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Calculul unui determinant cu formula din definiție este laborioasă, nepractică.

Determinantul matricelor de ordinul 2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinantul matricelor de ordinul 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

În aplicații, pentru calculul determinantului de ordinul al treilea se utilizează regula triunghiurilor sau regula lui Sarrus, reguli ilustrate în figura ce urmează.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Se numește *complement algebric* al elementului a_{ij} din matricea A , numărul

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ce rezultă multiplicând $(-1)^{i+j}$ cu *minorul* corespunzător elementului a_{ij} , adică determinantul matricei obținute prin eliminarea liniei i și coloanei j din A).

Dezvoltarea determinantului după linia i :

$$\det A = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \dots + a_{in}\Gamma_{in}.$$

Dezvoltarea determinantului după coloana j :

$$\det A = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{2j} + \dots + a_{nj}\Gamma_{nj}.$$

Proprietățile determinantilor

1. Dacă într-o matrice A

- toate elementele unei linii (coloane) sunt nule, sau
 - două linii (coloane) sunt egale, sau
 - două linii (coloane) sunt proporționale,
- atunci $\det A = 0$.

2. Dacă la o linie (coloană) a unui determinant se adună elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) multiplicat cu un scalar, valoarea determinantului rămâne neschimbată.

Spre exemplu, în determinantul de ordinul trei ce urmează, la linia întâi este adunată linia a treia multiplicată cu α :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} & a_{13} + \alpha a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Dacă se înmulțesc elementele unei linii (sau coloane) din matricea A cu un scalar α , atunci determinantul noii matrice este $\alpha \det A$.

4. Determinantul produsului dintre un scalar α și o matrice A de ordinul n :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

5. Determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantilor acestora:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

6. O matrice de ordinul n se numește matrice triunghiulară dacă toate elementele situate dedesubtul (sau deasupra) unei diagonale sunt nule. Determinantul unei matrice triunghiulare este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală sau $(-1)^n$ multiplicat cu produsul elementelor de pe diagonala secundară, după caz.

7. Descompunerea determinantului relativ la o linie (coloană) o ilustrăm în cazul particular al determinantului de ordinul trei, relativ la linia întâi:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Trebuie subliniat că această proprietate este valabilă în cazul determinantilor de orice ordin, indiferent de linia (sau coloana) luată în considerare.

8. Matricele pătratice de ordinul al doilea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ verifică următoarea identitate remarcabilă (Cayley-Hamilton):

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I_2 = \mathbf{0}_2$$

sau, echivalent,

$$A^2 = \text{tr}(A)A - \det(A)I_2,$$

unde $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ este urma matricei A .

Rangul unei matrice

Rangul unei matrice arbitrare este *ordinul* celui mai mare (în sensul numărului de linii/coloane) determinant nenul ce se poate forma cu elementele matricei date (fără a modifica poziția lor din liniile/coloanele matricei). *Rangul matricei* este egal cu r , notat $r = \text{rang } A$, dacă matricea admite un minor nenul de ordin r , iar toți minorii de ordin $r + 1$, dacă există, sunt nuli.

Matricea cu toate elementele nule are rangul 0.

Dacă cel puțin un element al matricei A (cu m linii și n coloane) este nenul, atunci rangul verifică inegalitatea

$$1 \leq \text{rang } A \leq \min \{m, n\}.$$

Cum se calculează rangul unei matrice?

Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n și $\det A \neq 0$, atunci $\text{rang } A = n$.

Dacă A este o matrice arbitrară sau una pătrată cu $\det A = 0$, se procedează în felul următor:

- se fixează un element nenul a_{ij} (dacă este posibil chiar a_{11} , elementul din colțul de NV);

- se bordează elementul a_{ij} cu o nouă linie și o nouă coloană astfel încât determinantul de ordinul al doilea rezultat să fie nenul și se trece la etapa următoare ($\text{rang } A \geq 2$); dacă prin bordarea lui a_{ij} toți determinanții de ordinul doi rezultați sunt nuli, atunci $\text{rang } A = 1$ și calculul s-a încheiat;

- se repetă procedeul descris prin bordarea submatricei de ordinul 2 cu determinant nenul obținută la etapa precedentă: se caută acum un determinant nenul de ordinul 3; dacă a fost găsit un astfel de determinant, se trece la etapa următoare ($\text{rang } A \geq 3$), iar dacă toți determinanții de ordinul 3 construiți sunt nuli, $\text{rang } A = 2$ și calculul s-a încheiat;

- procedeul poate fi repetat cel mult până se atinge rangul $\min \{m, n\}$ (respectiv $n - 1$ în cazul matricelor pătratice).

Inversabilitatea matricelor pătratice. Calculul inversei

O matrice pătratică A se numește *inversabilă* (nesingulară) dacă există o matrice (de același ordin), notată A^{-1} , pentru care

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Condiția necesară și suficientă ca matricea A să fie inversabilă este

$$\det A \neq 0.$$

Cum se determină inversa unei matrice A ?

- se calculează $\det A$: $\det A = 0 \Rightarrow A$ nu este inversabilă;

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

- se calculează *transpusa* $A^t = [a_{ji}]$ a matricei $A = [a_{ij}]$, formată cu elementele lui A prin schimbarea liniilor în coloane (păstrând ordinea lor). (Este de remarcat identitatea $\det A = \det A^t$.)

- se calculează reciproca (adjuncta) $A^* = [\Gamma_{ji}]$ a matricei $A = [a_{ij}]$, formată din complementii algebrici ai elementelor transpusei $A^t = [a_{ji}]$.

- se determină matricea inversă $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Sisteme de ecuații liniare

Un sistem linear de m ecuații cu n necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}.$$

Echivalent, sistemul poate fi exprimat sub forma matriceală $A \cdot X = B$, unde $A = [a_{ij}]$ reprezintă matricea sistemului și

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ respectiv } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Este posibilă numai una dintre următoarele situații:

- Sistemul are soluție unică și se numește *compatibil determinat*;
- Sistemul admite o infinitate de soluții și se numește *compatibil nedeterminat*;
- Sistemul nu are soluții și se numește *incompatibil*.

Cazuri particulare

Sistemul Cramer: dacă A este o matrice pătrată ($m = n$, numărul necunoscutelor coincide cu cel al ecuațiilor) și $\det A \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat, unica sa soluție, exprimată matriceal, fiind $X = A^{-1} \cdot B$. Același rezultat se obține aplicând regula lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A},$$

unde determinanții Δ_k , $k = \overline{1, n}$, rezultă din $\Delta = \det A$ prin înlocuirea coloanei k cu coloana termenilor liberi B .

Sistemul omogen: sistemul în care toți termenii liberi sunt nuli, adică $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$). Sistemele omogene sunt compatibile deoarece admit cel puțin soluția $(0, 0, \dots, 0)$, numită soluția banală.

Matricea extinsă a sistemului este matricea obținută prin completarea matricei A cu termenii liberi:

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Teorema Kronecker-Capelli

Un sistem algebric liniar este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului coincide cu rangul matricei extinse a sistemului: $\text{rang } A = \text{rang } \overline{A}$.

Odată calculat rangul matricei A se evidențiază *determinantul principal* Δ_p , adică "cel mai mare determinant nenul" (relativ la numărul de coloane) ce se poate forma cu elementele matricei A . Liniile determinantului principal indică ecuațiile principale, iar coloanele sale, necunoscutele principale; toate celelalte ecuații și necunoscute sunt secundare. Subsistemul format de ecuațiile principale este un sistem de tip Cramer, iar soluțiile sale sunt chiar soluțiile sistemului inițial.

Dacă există ecuații secundare, atunci determinantul principal poate fi bordat, pe linie, cu coeficienți situați în câte o ecuație secundară, și pe coloană, cu termeni liberi, obținându-se un determinant ce are ordinul cu o unitate mai mare decât cel principal. Determinanții obținuți prin bordare poartă numele de *determinanți (minori) caracteristici*.

Teorema lui Rouché

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă toți minorii caracteristici sunt nuli ($\text{rang } A < m$) sau dacă nu există asemenea minori ($\text{rang } A = m$).

Dacă sistemul este compatibil și $\text{rang } A = n$, atunci sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare). Dacă sistemul este compatibil și $\text{rang } A < n$, atunci gradul de nedeterminare a sistemului este numărul de necunoscute secundare $n - \text{rang } A > 0$.

Un *sistem omogen* admite soluții nebanale d.d. rangul matricei sistemului este inferior numărului de necunoscute ($\text{rang } A < n$).

Un *sistem omogen* în care numărul ecuațiilor coincide cu numărul necunoscutelor ($m = n$) admite soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului este nul ($\det A = 0$).

Structuri algebrice

Fie M o mulțime nevidă; o lege de corespondență ce asociază în mod unic oricărei perechi de elemente din M un element din M

$$(x, y) \mapsto x * y : M \times M \rightarrow M$$

se numește *lege de compoziție* pe M .

Simbolul $*$ utilizat pentru a desemna elementul compus $x*y$ este inspirat de cele două tipuri de legi de compoziție întâlnite din zorii educației matematice, adunarea ($+$) și înmulțirea ($\cdot$). În notație aditivă, elementul compus se notează prin $x + y$ și se numește sumă, iar în notație multiplicativă se notează $x \cdot y$ (uneori scris pe scurt chiar xy) și se numește produs.

Submulțimea $M_0 \subset M$ se numește *parte stabilă a lui M relativ la legea de compoziție $*$* dacă pentru orice (x_0, y_0) din $M_0 \times M_0$, elementul $x_0 * y_0$ este situat de asemenea în M_0 :

$$(\forall) x_0, y_0 \in M_0 \Rightarrow x_0 * y_0 \in M_0.$$

Legea de compoziție $*$ se numește *asociativă* dacă

$$(\forall) x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z).$$

Legea de compoziție $*$ se numește *comutativă* dacă

$$(\forall) x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x.$$

Elementul $a \in M$ se numește *element absorbant pentru legea $*$* dacă

$$(\forall) x \in M \Rightarrow x * a = a * x = a.$$

Elementul $e \in M$ se numește *element neutru pentru legea $*$* dacă

$$(\forall) x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$$

Elementul neutru pentru o lege de compoziție, dacă există, este unic.

Elementul neutru al unei legi de compoziție de tip aditiv este notat prin 0 și este numit *element de efect nul* (sau, mai simplu, *zero*).

Elementul neutru al unei legi de compoziție de tip multiplicativ este notat prin 1 și este numit *element unitate*.

Un element $x \in M$ se numește *simetrizabil în raport cu legea $*$* dacă

$$(\exists) x' \in M \text{ a.î. } x * x' = x' * x = e.$$

Elementul notat prin x' se numește *simetricul lui x* . Evident, x' este simetrizabil și

$$(x')' = x.$$

Dacă elementele $x, y \in M$ sunt simetrizabile, atunci $x * y$ este simetrizabil și

$$(x * y)' = y' * x'.$$

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziție de tip aditiv este notat prin $-x$ și este numit *opusul lui x* .

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziție de tip multiplicativ este notat prin x^{-1} și este numit *inversul lui x* .

Definiție

Mulțimea nevidă M , înzestrată cu legea de compoziție $*$, se numește *monoid* dacă legea $*$ este asociativă și are element neutru:

$$(\forall) x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z);$$

$$(\exists) e \in M \text{ a.î. } (\forall) x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$$

Dacă legea de compoziție este comutativă, atunci M se numește *monoid comutativ*.

Definiție

Mulțimea nevidă G , înzestrată cu legea de compoziție $*$, se numește *grup* dacă legea $*$ este asociativă, are element neutru și toate elementele din G sunt simetrizabile.

Așadar, $(G, *)$ este grup d.d. sunt satisfăcute următoarele axiome:

$$(\forall) x, y, z \in G \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z);$$

$$(\exists) e \in G \text{ a.î. } (\forall) x \in G \Rightarrow x * e = e * x = x;$$

$$(\forall) x \in G \quad (\exists) x' \in G \text{ a.î. } x * x' = x' * x = e.$$

Dacă legea de compoziție este comutativă, atunci grupul $(G, *)$ se numește *grup comutativ* sau *abelian*.

Teoremă

Fie $(G, *)$ un grup și $a, b \in G$ două elemente arbitrare din G . Ecuațiile $a * x = b$ și $y * a = b$ au soluții unice în G , mai precis

$$\begin{aligned} a * x &= b \iff x = a' * b, & \text{respectiv} \\ y * a &= b \iff y = b * a'. \end{aligned}$$

Fie $(G, +)$ un grup în care legea de compoziție este de tip aditiv. Atunci pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ și $a \in G$ au loc identitățile:

$$ma + na = (m + n)a, \quad m(na) = (mn)a, \quad - (na) = n(-a),$$

unde pentru $n \neq 0$,

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ ori}} = na,$$

și, prin convenție, $0a = 0$.

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup în care legea de compoziție este de tip multiplicativ, atunci pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ și $a \in G$ au loc identitățile:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^n)^{-1} = a^{-n},$$

unde pentru $n \neq 0$,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ori}} = a^n,$$

și, prin convenție, $a^0 = 1$.

Definiție

Fie $(G, *)$ un grup. O submulțime nevidă H a lui G se numește *subgrup* al grupului $(G, *)$ dacă $(H, *|_H)$ este de asemenea grup, unde $*|_H$ este legea de compoziție pe H indusă de legea de compoziție pe G , adică

$$\forall x, y \in H : x *|_H y = x * y \in H.$$

$(H, *)$ este subgrup al grupului $(G, *)$ d.d.

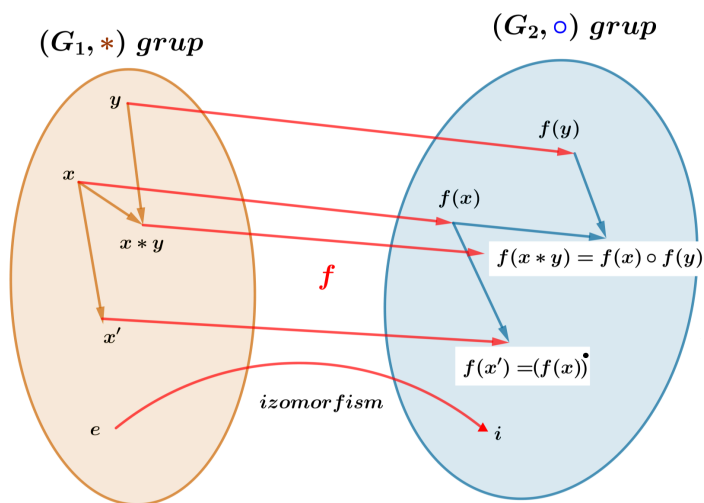
$$(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H;$$

$$(\forall) x \in H \Rightarrow x' \in H.$$

Definiție

Fie $(G_1, *)$ și $(G_2, \circ)$ două grupuri; funcția bijectivă $f : G_1 \rightarrow G_2$ se numește *izomorfism* de grupuri dacă

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y) \quad (\forall) x, y \in G_1.$$



e și i sunt elementele neutre ale celor două grupuri. Este indicat cu *accent (')* simetricul din grupul G_1 , respectiv cu *punct ($\bullet$)* simetricul din grupul G_2 .

Exemplu

Funcția logaritm natural $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ realizează un izomorfism între $((0, +\infty), \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor pozitive și $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale. Într-adevăr, funcția $\ln$ este bijectivă și satisface condiția

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Definiție

O mulțime nevidă A înzestrată cu două legi de compoziție, una aditivă și una multiplicativă, notate tradițional $+$ și $\cdot$, se numește inel dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(A, +)$ este grup comutativ,

$(A, \cdot)$ este monoid,

înmulțirea $(\cdot)$ este distributivă față de adunare $(+)$, mai precis

$$(\forall) x, y, z \in A : x(y + z) = xy + xz \quad \text{și} \quad (y + z)x = yx + zx.$$

Dacă înmulțirea elementelor din A este o lege de compoziție comutativă, atunci inelul $(A, +, \cdot)$ se numește inel *comutativ*.

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel fără divizori ai lui zero dacă

$$x \neq 0 \quad \text{și} \quad y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$$

Un inel comutativ (format din cel puțin două elemente) fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Elementele nenule $u, v \in A$ sunt divizori ai lui zero dacă $uv = 0$.

Astfel, inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate. Singurele elemente inversabile (adică simetrizabile față de operația multiplicativă $\cdot$) sunt 1 și -1 .

Definiție

Fie $(A_1, +, \cdot)$ și $(A_2, +, \cdot)$ două inele (fiecare înzestrată cu propriile sale legi de compoziție, deși acestea sunt notate similar); funcția bijectivă $f : A_1 \rightarrow A_2$ se numește *izomorfism* de inele dacă

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned} \quad (\forall) x, y \in A_1.$$

Definiție

Un inel $(K, +, \cdot)$ se numește corp dacă $0 \neq 1$ și orice element nenul x este inversabil.

Exemple

Mulțimile numerice $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ cu operațiile uzuale sunt corpuri comutative.

$\mathbb{Z}_p$, inelul claselor de resturi modulo p

Fie n un număr întreg arbitrar și p un număr natural nenul fixat; conform teoremei împărțirii cu rest, există doi întregi, q și r , unic determinați, astfel încât

$$n = qp + r \quad \text{cu } 0 \leq r < p.$$

Numărul q se numește *cât* al împărțirii $n : p$, iar r se numește *rest*. Resturile posibile la împărțirea $n : p$ sunt $0, 1, 2, \dots, p - 1$. Astfel mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se poate descompune în p submulțimi disjuncte:

$$\begin{aligned} \{\dots, -p, \boxed{0}, p, 2p, \dots\} &= \{kp \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{0}, \\ \{\dots, -p+1, \boxed{1}, p+1, 2p+1, \dots\} &= \{kp+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{1}, \\ &\vdots \\ \{\dots, -p+r, \boxed{r}, p+r, 2p+r, \dots\} &= \{kp+r \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{r}, \\ &\vdots \\ \{\dots, -p+(p-1), \boxed{p-1}, p+(p-1), \dots\} &= \{kp+(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \widehat{p-1}, \end{aligned}$$

numite clase de resturi modulo p . Mulțimea tuturor claselor de resturi modulo p se notează $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \dots, \widehat{p-1}\}.$$

Pe această mulțime se introduc două legi de compoziție după cum urmează:

$$\begin{aligned} \text{adunarea claselor modulo } p, \quad \widehat{a} + \widehat{b} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a+b} \quad \text{și} \\ \text{înmulțirea claselor modulo } p, \quad \widehat{a} \cdot \widehat{b} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \cdot b}. \end{aligned}$$

Adunarea și înmulțirea sunt corect definite deoarece, conform definiției claselor de resturi, dacă întregul $k \in \widehat{r}$ și $0 \leq r < p$, atunci $\widehat{k} = \widehat{r}$.

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel comutativ în care elementul neutru la adunare este $\widehat{0}$, iar elementul neutru la înmulțire este $\widehat{1}$.

Orice clasă de resturi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ are opus: $-\widehat{a} = \widehat{p-a}$.

Nu toate clasele de resturi din $\mathbb{Z}_p$ sunt inversabile: elementul $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ este inversabil d.d. singurul divizor comun al lui a și p este 1.

În consecință, dacă a este divizor propriu al lui p ($a \neq 1$ și $a \neq p$), atunci $p = ab$, iar $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{p} = \widehat{0}$, deci $\widehat{a}$ este divizor al lui zero.

i) Dacă p este neprim, atunci $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel cu divizori ai lui zero.

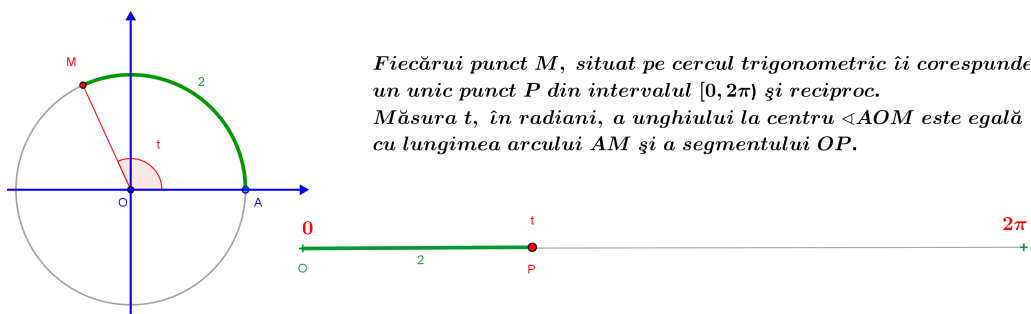
ii) Dacă p este un număr prim, atunci toate elementele din $\mathbb{Z}_p \setminus \{\widehat{0}\}$ sunt inversabile, ceea ce conferă lui $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ o structură de corp comutativ.

iii) Dacă p este un număr prim, atunci $\widehat{a}^{p-1} = \widehat{1}$ oricare ar fi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\widehat{0}\}$.

TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

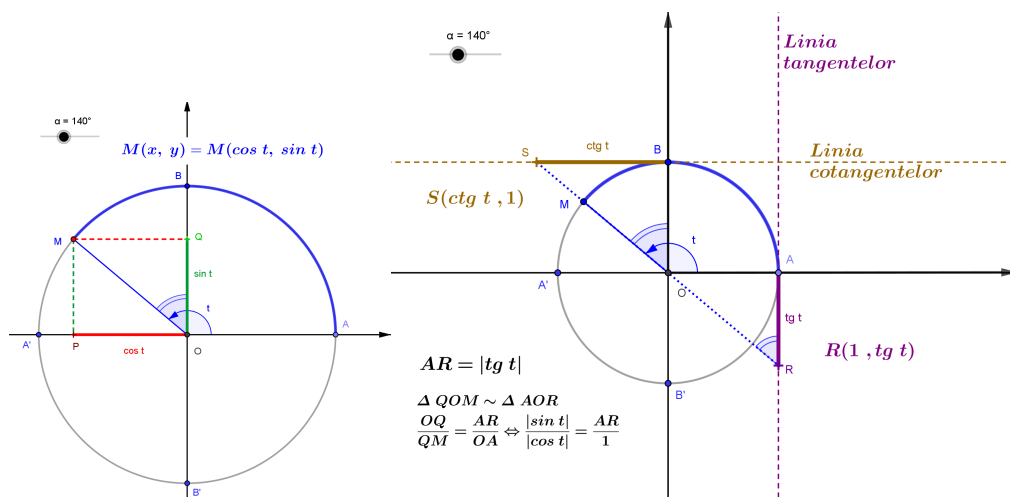
Funcțiile trigonometrice

$\mathcal{C}(O;1) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ - cercul trigonometric (centrat în originea axelor de coordonate cu raza 1). $M(x,y)$ - punctul curent pe cercul trigonometric.



$t \in [0, 2\pi)$ - măsura în radiani a unghiului la centru format de semiaxa pozitivă Ox cu raza vectoare OM .

Correspondența $t \longleftrightarrow M(x, y)$ este bijectivă.



Definiții

$$\cos t = x, \quad \sin t = y, \quad tg t = \frac{y}{x} \quad \text{și} \quad ctg t = \frac{x}{y}.$$

Definiția se poate extinde de la intervalul $[0, 2\pi)$ la $\mathbb{R}$ prin periodicitate, și reciproc, fiecărui număr real îi corespunde un unic număr din $[0, 2\pi)$ prin procedeul numit "reducerea la perioada principală":

$$(\forall) t \in \mathbb{R} \quad (\exists!) t^* \in [0, 2\pi) \quad \text{a.î.} \quad t = t^* + 2k\pi, \quad \text{unde} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k = \left[\frac{t}{2\pi} \right], \quad \text{cu}$$

$$\cos t = \cos t^* \quad \text{și} \quad \sin t = \sin t^*$$

Proprietățile funcțiilor $\cos$ și $\sin$

$\cos$ și $\sin$ sunt *mărginite*: $|\cos t| \leq 1$ și $|\sin t| \leq 1 \quad (\forall) t \in \mathbb{R}$.

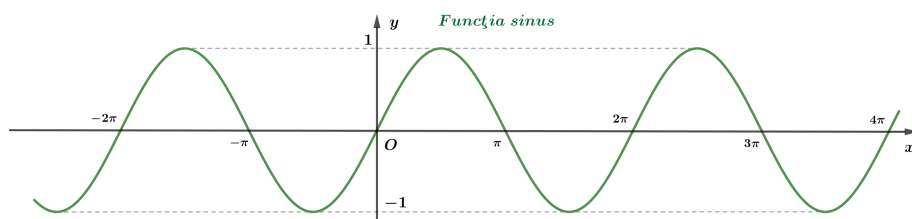
$\cos$ și $\sin$ sunt *periodice* cu *perioada* 2π : $\cos(t + 2k\pi) = \cos t \quad (\forall) t \in \mathbb{R}$
 $\sin(t + 2k\pi) = \sin t \quad (\forall) k \in \mathbb{Z}$

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este o funcție *pară*, adică $\cos(-t) = \cos t$.

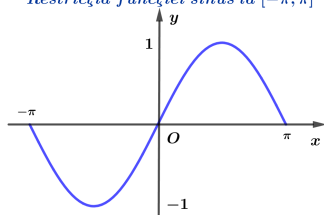
Funcția $\cos$ este *pozitivă* în cadranele I și IV, respectiv *negativă* în II și III.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este o funcție *impară*, adică $\sin(-t) = -\sin t$.

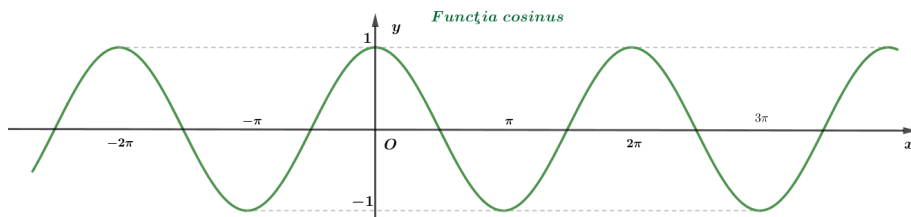
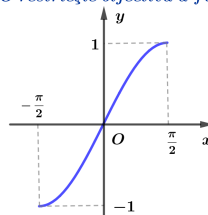
Funcția $\sin$ este *pozitivă* în cadranele I și II, respectiv *negativă* în III și IV.



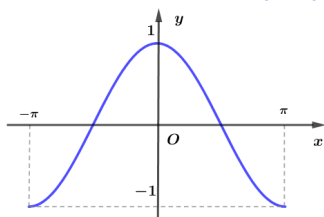
Restricția funcției sinus la $[-\pi, \pi]$



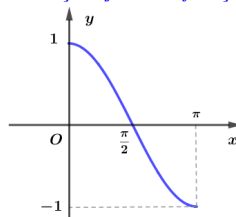
O restricție bijectivă a funcției sinus



Restricția funcției cosinus la $[-\pi, \pi]$



O restricție bijectivă a funcției cosinus



Tabelul de valori al funcțiilor sin și cos

°	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

°	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Proprietățile funcțiilor tg și ctg

$$\operatorname{tg}(t + n\pi) = \operatorname{tg} t \quad (\forall) t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(t + n\pi) = \operatorname{ctg} t \quad (\forall) t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{Z}.$$

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție *impară*: $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$.

$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție *impară*: $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$.

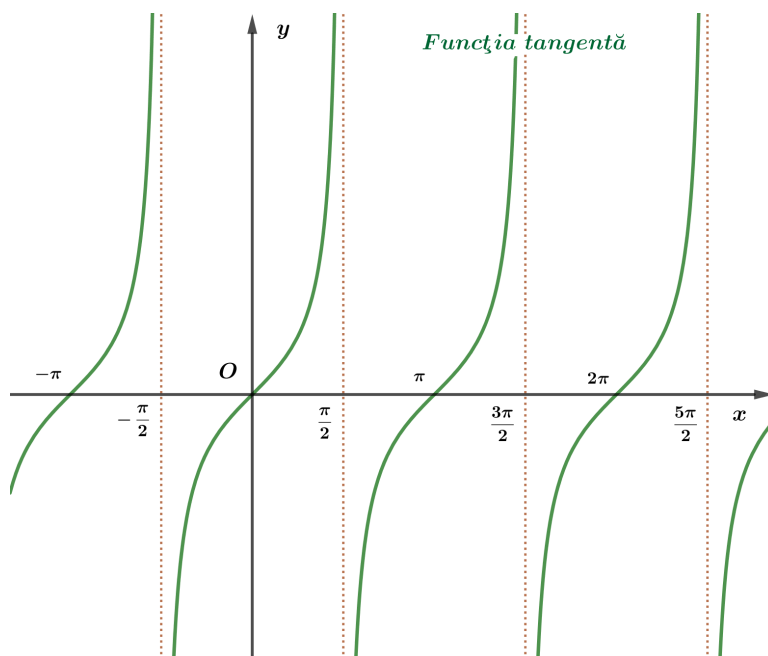
Funcțiile tg și ctg sunt *pozitive* în I și III respectiv *negative* în II și IV.

Dreptele $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt asimptote verticale la graficul funcției tangentă:

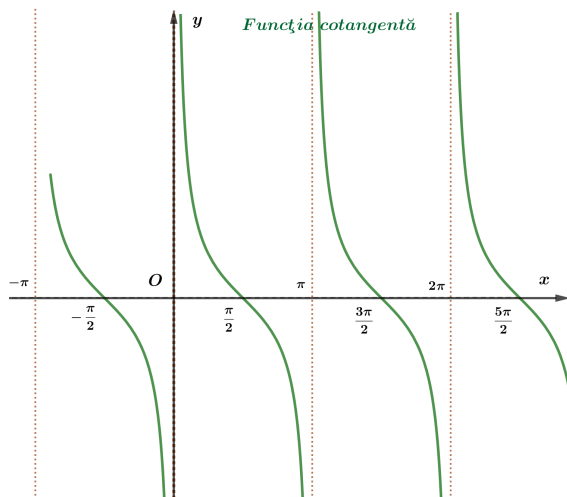
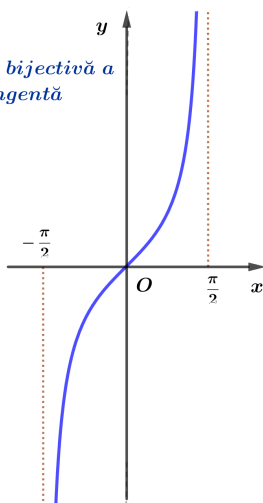
$$\lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = \infty, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = -\infty.$$

Dreptele $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt asimptote verticale la graficul funcției cotangentă:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \operatorname{ctg} t = -\infty, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \operatorname{ctg} t = \infty.$$



O restricție bijectivă a funcției tangentă



Tabelul de valori al funcțiilor tg și ctg

$^{\circ}$	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty -\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$-\infty +\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty +\infty$

Relații între funcțiile trigonometrice*Formule fundamentale*

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad ; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \quad ; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} .$$

Funcțiile trigonometrice ale complementului

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t \quad ; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t \quad ; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \quad ; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t . \end{aligned}$$

Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de arce

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b; \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b; \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b; \\ \operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}; \quad \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \end{aligned}$$

Funcțiile trigonometrice ale dublului și triplului unui arc

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \cos t \sin t; & \sin 3t &= 3 \sin t - 4 \sin^3 t; \\ \cos 2t &= 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t = \cos^2 t - \sin^2 t; & \cos 3t &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t; \\ \operatorname{tg} 2t &= \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}; & \operatorname{tg} 3t &= \frac{3 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 t}. \end{aligned}$$

Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul arcului dublu

$$\sin t = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{2}}; \quad \cos t = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}}; \quad \operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}};$$

Semnul din fața radicalului $\left\langle \begin{array}{l} \text{se stabilește cadranul ce îl conține pe } t; \\ \text{se alege semnul funcției din cadranul lui } t. \end{array} \right.$

Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}; \quad \cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$$

Transformarea sumei/diferenței în produs

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}; & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}; \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}; & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}; \\ \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}; & \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q &= \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}. \end{aligned}$$

Transformarea produsului în sumă/diferență

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b); \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) + \frac{1}{2} \cos(a+b); \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} \sin(a-b) + \frac{1}{2} \sin(a+b). \end{aligned}$$

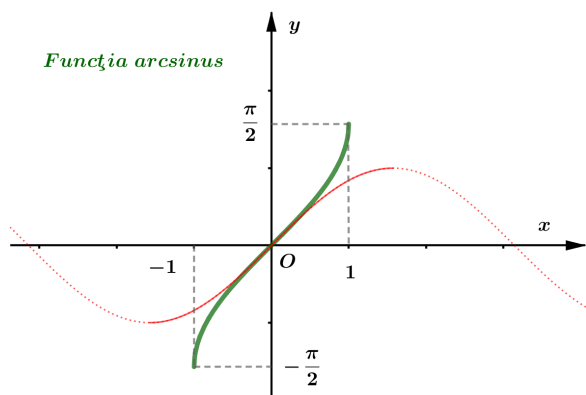
Funcțiile trigonometrice inverse

Restricția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\arcsin a =$ "arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ al cărui sinus este a " ($-1 \leq a \leq 1$)

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$ $x \in [-1, 1] \quad , \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
---	--



$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

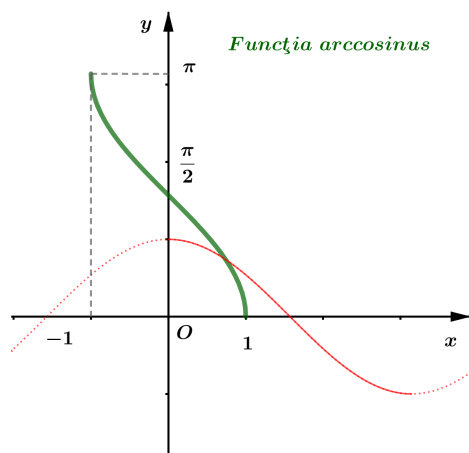
(arcsin este impară)

Restricția $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\arccos a$ = "arcul cuprins între 0 și π al cărui cosinus este a " ($-1 \leq a \leq 1$)

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$	$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$
$x \in [-1, 1]$	$y \in [0, \pi]$



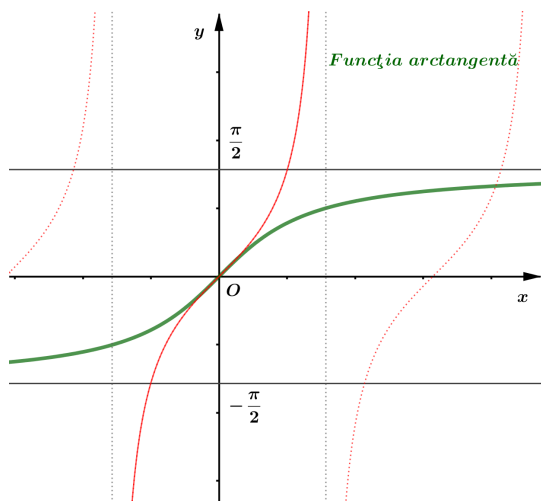
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Restricția $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\arctg a$ = "arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ a cărui tangentă este a " ($a \in \mathbb{R}$)

$\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$\arctg x = y \Leftrightarrow x = \tan y$
$x \in \mathbb{R}$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

(arctg este impară)

Dreptele $y = -\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale la graficul funcției arctangentă.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Relații remarcabile între funcțiile trigonometrice inverse

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1])$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{sign}(x) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

Ecuatiile trigonometrice elementare

1. Ecuația $\sin x = a$ are soluție d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\left\{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

În particular, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Ecuația $\cos x = a$ are soluție d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Ecuația $\operatorname{tg} x = a$ are soluție $(\forall) a \in \mathbb{R}$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\{\arctg a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuația liniară

$$a \cos t + b \sin t = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0)$$

are soluții dacă și numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Metode de rezolvare a ecuației liniare

· Substituția $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ conduce la sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

· Substituția $z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ conduce la ecuația de gradul al doilea

$$a(1 - z^2) + 2bz = c(1 + z^2).$$

Această metodă are neajunsul de a pierde (eventual) soluțiile de forma $(2k+1)\pi$.

· Metoda unghiului auxiliar constă în transformarea expresiei din membrul stâng al ecuației.

$$a \cos t + b \sin t = c \Leftrightarrow \cos t + \frac{b}{a} \sin t = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos t + \operatorname{tg} \varphi \sin t = \frac{c}{a},$$

unde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numit unghi auxiliar, este unicul cu proprietatea $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Rezultă imediat

$$\begin{aligned} \cos(t - \varphi) &= \frac{c}{a} \cos \varphi \Leftrightarrow \\ t &\in \left\{ \varphi \pm \arccos \left(\frac{c}{a} \cos \varphi \right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Aplicațiile trigonometriei în geometrie

$AE \perp BC$, h_a – lungimea înălțimii

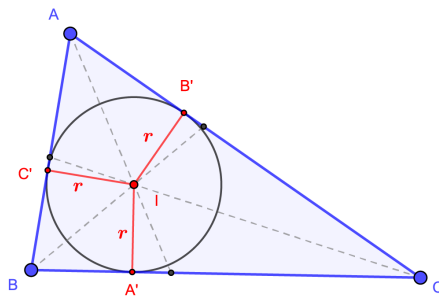
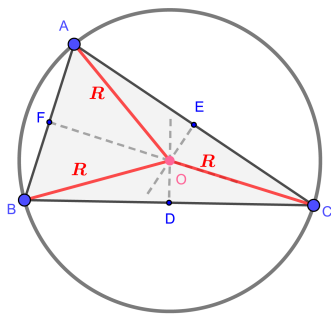
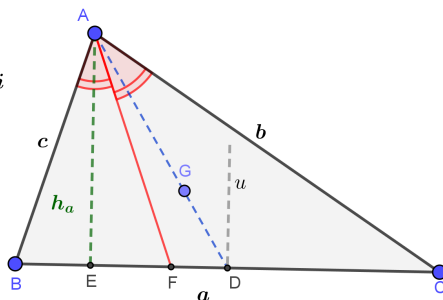
$\widehat{BAF} \equiv \widehat{CAF}$, AF – bisectoare

$BD \equiv DC$, AD – mediană

G , centrul de greutate

$AG = \frac{2}{3} AD$ și $GD = \frac{1}{3} AD$

$|Du \perp BC$, $|Du$ – mediatoare

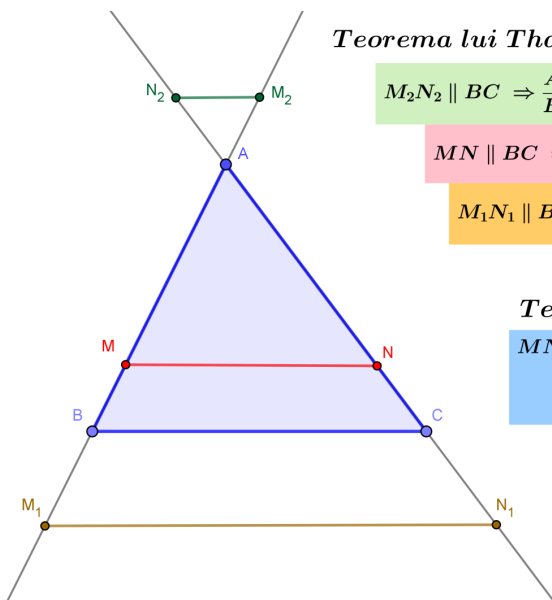


Teorema lui Thales

$$M_2N_2 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_2}{BM_2} = \frac{AN_2}{CN_2}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$$

$$M_1N_1 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_1}{BM_1} = \frac{AN_1}{CN_1}$$



Teorema asemănării

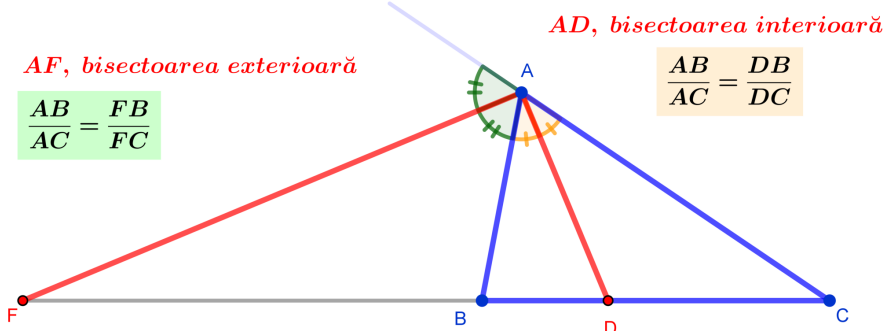
$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} (= \rho)$$

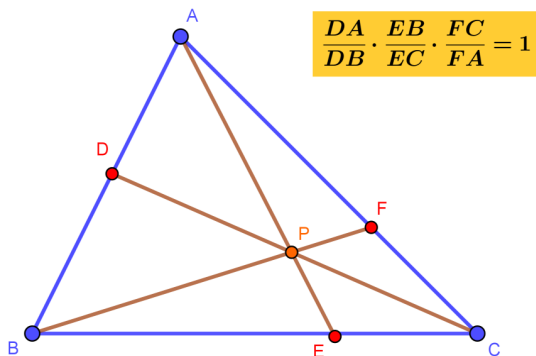
ρ , raportul de asemănare

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \rho^2$$

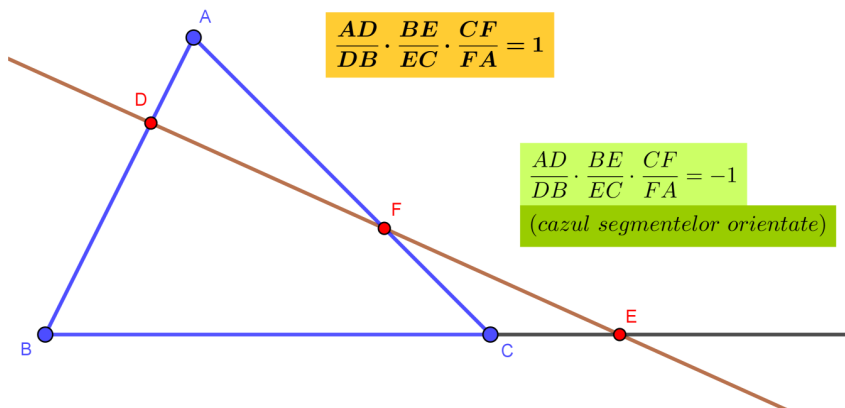
Teorema bisectoarei



Teorema lui Ceva



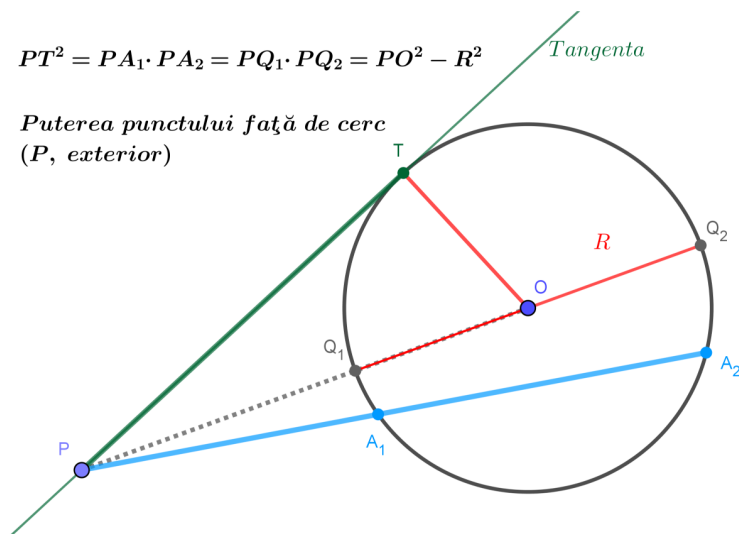
Teorema lui Menelaus



$$PT^2 = PA_1 \cdot PA_2 = PQ_1 \cdot PQ_2 = PO^2 - R^2$$

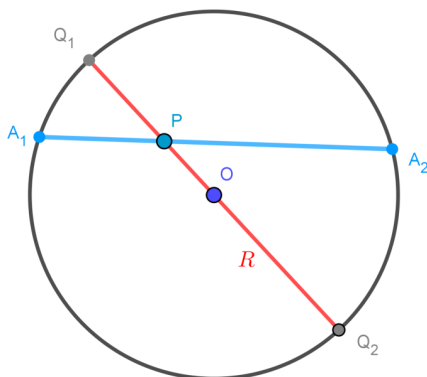
Tangenta

*Puterea punctului față de cerc
(P, exterior)*



*Puterea punctului față de cerc
(P, interior)*

$$PA_1 \cdot PA_2 = PQ_1 \cdot PQ_2 = R^2 - PO^2$$



Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Aria triunghiului

$$\begin{aligned}
S &= \frac{ah_a}{2} &= \frac{bh_b}{2} &= \frac{ch_c}{2} \\
S &= \frac{bc \sin A}{2} &= \frac{ca \sin B}{2} &= \frac{ab \sin C}{2} \\
S &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} &= \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B} &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}
\end{aligned}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$S = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

$$S = pr \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formula lui Heron})$$

Numere complexe*Aplicațiile trigonometriei în algebră*

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$ -mulțimea numerelor complexe

$z = x + iy$, forma algebrică a numărului complex z

$\operatorname{Re} z = x$, partea reală a numărului complex z

$\operatorname{Im} z = y$, partea imaginară a numărului complex z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, modulul numărului complex z

$\bar{z} = x - iy$, conjugatul numărului complex z

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Numărul complex $z = x + iy$ este *afixul* punctului $M(x, y)$, iar conjugatul său, $\bar{z} = x - iy$, este *afixul* simetricului punctului $M(x, y)$ față de axa Ox .

- se notează prin t unghiul format de dreapta OM ($M \neq O$) cu semiaxa pozitivă Ox (*argumentul* lui z);

- se notează prin r lungimea segmentului OM (*modulul* lui z);

- din definiția funcțiilor trigonometrice rezultă

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (r > 0 \text{ iar } t \in [0, 2\pi)).$$

$z = r(\cos t + i \sin t)$ *forma trigonometrică a lui z*

Numerele r și t sunt cordonatele polare ale punctului $M(x, y)$: r este *raza polară*, O este *polul*, iar t este *argumentul* lui z .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ t &= \arctg \frac{y}{x} + k\pi \end{aligned}$$

($k = 0$ pt. $M \in \text{Cadr I}$, $k = 1$ pt. $M \in \text{Cadr II} - \text{III}$, $k = 2$ pt. $M \in \text{Cadr IV}$).

Înmulțirea și împărțirea numerelor complexe $z_j = r_j(\cos t_j + i \sin t_j)$, $j = \overline{1, 2}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$$

Formula lui Moivre

$$z = r(\cos t + i \sin t) \Rightarrow z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$$

Rădăcina complexă de ordinul n a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Elemente de geometrie analitică

Vectori

Versorii axelor de coordonate: $\bar{\mathbf{i}} = (1, 0)$ și $\bar{\mathbf{j}} = (0, 1)$.

Vectorul de poziție al punctului $M(x, y)$: $\overrightarrow{OM} = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}}$.

Lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ (distanța dintre M și origine): $\begin{aligned} \|\overrightarrow{OM}\|^2 &= x^2 + y^2 \\ OM^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$

Vectorul cu originea $T(a, b)$ și extremitatea $M(x, y)$:

$$\overrightarrow{TM} = (x - a)\bar{\mathbf{i}} + (y - b)\bar{\mathbf{j}}.$$

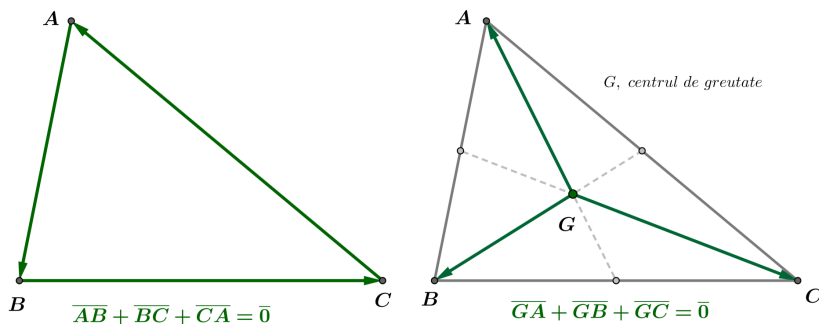
Lungimea vectorului $\overrightarrow{TM}$ (distanța dintre punctele $T(a, b)$ și $M(x, y)$):

$$\|\overrightarrow{TM}\| = TM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Împărțirea segmentului PQ în raportul $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{MQ}$

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \Rightarrow M(x, y) \text{ cu } x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \text{ și } y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Caz particular $k = 1$, mijlocul segmentului PQ : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Dreapta în plan

1. Ecuația generală explicită : $y = mx + n$

(m , panta dreptei : $m = tg\varphi$, unde φ este unghiul dintre dreaptă și semi-axa pozitivă Ox).

(Dreptele paralele cu axa Oy - dreptele verticale - sunt caracterizate prin ecuația $x = p$; panta acestora este infinită.)

2. Ecuația generală implicită : $Ax + By + C = 0$ ($m = -\frac{A}{B}$).

3. Ecuația dreptei prin tăieturi : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (dreapta taie Ox în a și Oy în b).

4. Ecuația dreptei ce trece prin $T(a, b)$ și are panta m : $y - b = m(x - a)$.

5. Ecuația dreptei ce trece prin $T(a, b)$ și $S(u, v)$, TS :
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Panta dreptei TS este $m_{TS} = \frac{v - b}{u - a}$.

Aria triunghiului ABC cu $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Distanța de la punctul $T(a, b)$ la dreapta $(d) : Ax + By + C = 0$

$$dist(T, d) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unghiul ascuțit al dreptelor $(d_1) : y = m_1x + n_1$ și $(d_2) : y = m_2x + n_2$ este ψ cu

$$tg \psi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right|.$$

În cazul dreptelor exprimate explicit (de pantă finită)

$$(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

$$(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Cercul

Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix (numit centru).

1. Ecuația cercului de rază r și centru $C(u, v)$:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

2. Ecuația generală a cercului : $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

3. Ecuația cercului ce trece prin punctele $A(m, n)$, $B(s, t)$ și $C(p, q)$:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ m^2 + n^2 & m & n & 1 \\ s^2 + t^2 & s & t & 1 \\ p^2 + q^2 & p & q & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersecția dreptei cu cercul este dată de soluția sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ y = mx + n \end{cases}.$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Șiruri de numere reale

O funcție reală f definită pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ (sau, echivalent, pe o secțiune $\mathbb{N}_m$ a sa ce cuprinde toate numerele naturale ce depășesc o valoare fixată m) se numește *șir de numere reale*. Este convenabilă precizarea șirului prin intermediul termenului său general a_n , unde $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Vom nota șirul prin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau mai simplu $(a_n)_n$.

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este *monoton* dacă și numai dacă $\text{sign}(a_{n+1} - a_n)$ este constant oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. În particular:

$$\begin{aligned} \text{dacă } a_{n+1} - a_n > 0 \quad (\forall) n \in \mathbb{N} &\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textit{strict crescător} \\ \text{dacă } a_{n+1} - a_n < 0 \quad (\forall) n \in \mathbb{N} &\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textit{strict descrescător} \end{aligned}$$

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *mărginit* dacă toți termenii săi se găsesc într-un interval mărginit:

$$(\exists) M > 0 \text{ a. î. } |a_n| \leq M, (\forall) n \in \mathbb{N} .$$

Definiție

Șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *convergent* dacă există un număr real l cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|a_n - l| < \varepsilon$. Numărul real l este unic determinat și se numește *limita* șirului cu termenul general a_n ; vom nota aceasta prin $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sau $a_n \rightarrow l$.

Șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ ($-\infty$) dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se poate preciza un rang n_ε astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $a_n > \varepsilon$ ($a_n < -\varepsilon$).

Șirurile care au limita infinită sau cele pentru care limita nu există se numesc *divergente*.

Dacă $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir strict crescător de numere naturale, atunci șirul $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *subșir* al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În particular, pentru $k_n = 2n$ se obține subșirul termenilor de rang par, $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, iar pentru $k_n = 2n + 1$ se obține subșirul termenilor de rang impar, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Teoremă

Dacă un șir are limită, atunci orice subșir al său are aceeași limită. În consecință, dacă două subșiruri ale aceluiași șir au limite diferite, atunci șirul respectiv nu are limită.

De exemplu, șirul dat de termenul general $a_n = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}$, nu are limită deoarece $a_{2n} = 2n \rightarrow \infty$, iar $a_{2n+1} = -(2n+1) \rightarrow -\infty$.

Teoremă

1. Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ două șiruri convergente având aceeași limită l , iar $(x_n)_n$ este un alt șir care verifică dubla inegalitate:

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ oricare ar fi } n \geq n'.$$

Atunci $(x_n)_n$ este convergent, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

2. Dacă $(a_n)_n$ este un șir cu limita ∞ , iar $(x_n)_n$ un șir astfel ca $x_n \geq a_n$, oricare ar fi $n \geq n'$, atunci $x_n \rightarrow \infty$.

3. Dacă $(b_n)_n$ este un șir cu limita $-\infty$, iar $(x_n)_n$ un șir astfel ca $x_n \leq b_n$, oricare ar fi $n \geq n'$, atunci $x_n \rightarrow -\infty$.

Consecința 1

Fie $(b_n)_n$ un șir convergent având limita 0 și $(x_n)_n$ un alt șir pentru care există numărul real l cu proprietatea

$$|x_n - l| \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq n'.$$

Atunci $(x_n)_n$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Consecința 2

Fie șirul $(x_n)_n$ cu termenul general de forma $x_n = a_n \cdot b_n$; dacă $(a_n)_n$ este un șir mărginit, iar $(b_n)_n$ unul convergent cu limita 0, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Teoremă

- (i) Orice șir monoton are limită, finită sau infinită.
- (ii) Orice șir convergent de numere reale este mărginit.
- (iii) Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Reciprocele afirmațiilor de mai sus sunt false. Pentru (i) și (iii), șirul cu termenul general $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geq 1$, are limita 0, deci este convergent, dar nu este monoton: $x_1 > x_2$, iar $x_2 < x_3$.

Pentru (ii), șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, dar nu are limită, deci nu este convergent.

Limite remarcabile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \quad (r > 0) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \text{ nu există pentru } q \leq -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) = \begin{cases} -\infty, & a_0 < 0 \\ +\infty, & a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \infty \cdot \text{sign} \left(\frac{a_0}{b_0} \right), & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^r} = 0 \quad (r > 0)$$

Șirul cu termenul general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător și mărginit.

Șirul cu termenul general $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ este crescător și verifică inegalitățile

$$2 < e_n < E_n < e < 3.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Numărul $e \simeq 2,718\,281\dots$ este baza logaritmului natural: $\ln e = 1$.

Teorema Cauchy-d' Alembert

Fie (a_n) un șir de numere pozitive. Dacă șirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ are limită, atunci șirul $(\sqrt[n]{a_n})_{n \geq 2}$ are limită, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două șiruri de numere reale care verifică următoarele condiții:

- (i) șirul (b_n) este strict crescător și nemărginit;
- (ii) există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Atunci șirul cu termenul general $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{0}{0}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două șiruri de numere reale care verifică următoarele condiții:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$;
- (ii) șirul (b_n) este strict descrescător;
- (iii) există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Atunci șirul cu termenul general $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

Operațiile cu limite sugerează prelungirea operațiilor algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ după cum urmează:

$\begin{array}{ll} a + \infty = \infty + a & = \infty \quad (\forall) a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a + (-\infty) = -\infty + a & = -\infty \quad (\forall) a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a & = \infty \quad (\forall) a \in (0, \infty] \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a & = -\infty \quad (\forall) a \in [-\infty, 0) \end{array}$		$\begin{array}{l} \frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad (\forall) a \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{+0} = \infty \quad (\forall) a \in (0, \infty] \\ \frac{a}{-0} = -\infty \quad (\forall) a \in (0, \infty] \end{array}$
$\begin{array}{ll} \infty^b & = \begin{cases} \infty, & (\forall) b \in (0, \infty) \\ 0, & (\forall) b \in (-\infty, 0) \end{cases} \\ (-\infty)^{2k} & = \infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^* \\ (-\infty)^{2k+1} & = -\infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N} \\ \sqrt[k]{\infty} & = \infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*, k > 1 \\ \sqrt[2k+1]{-\infty} & = -\infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^* \end{array}$		$\begin{array}{ll} a^\infty & = \begin{cases} 0, & (\forall) a \in (0, 1) \\ \infty, & (\forall) a \in (1, \infty] \end{cases} \\ a^{-\infty} & = \begin{cases} \infty, & (\forall) a \in (0, 1) \\ 0, & (\forall) a \in (1, \infty] \end{cases} \\ 0^\infty & = 0 \end{array}$

Cazuri de nedeterminare (operații fără sens)

$\infty + (-\infty)$	$0 \cdot \infty$	$\infty \cdot 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$
$-\infty + \infty$	$0 \cdot (-\infty)$	$(-\infty) \cdot 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$

Exemple

a) De ce $-\infty + \infty$ este operație fără sens?

Dacă $x_n = -n^2 + 1$ și $y_n = 2n^2 + n$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ se află în cazul $-\infty + \infty$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + 1) = \infty$.

Dacă $x_n = -n^2 + \frac{1}{n}$ și $y_n = n^2 + 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ se află de asemenea în cazul $-\infty + \infty$, dar, de această dată, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = 1$.

b) De ce 0^0 este operație fără sens?

Dacă $x_n = \frac{1}{n}$ și $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n}$ se află în cazul 0^0 , iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Dacă $x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$ și $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n}$ se află de asemenea în cazul 0^0 , dar, de această dată, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n \cdot n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$.

c) De ce 0^∞ nu reprezintă un caz exceptat?

Oricare ar fi două șiruri $(x_n), (y_n)$ cu $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n \cdot \ln x_n} = e^{\infty \cdot \ln(+0)} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0$.

B. Limite de funcții și funcții continue

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un *punct de acumulare* al acesteia, adică un punct pentru care există un șir $(x_n)_n$ din D , $x_n \neq a$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are limita l (finită sau infinită) în punctul a dacă pentru orice șir $(x_n)_n$ din D , $x_n \neq a$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ este verificată egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. Notăm aceasta prin $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Limita unei funcții într-un punct (de acumulare al domeniului de definiție), dacă există, este unică.

Dacă există două șiruri $(x'_n)_n$ și $(x''_n)_n$ în D , $x'_n, x''_n \neq a$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = a,$$

dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n),$$

atunci funcția f nu are limită în punctul a .

Exemple

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nu există deoarece pentru șirurile $(2n\pi)_n$ și $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)_n$ ce tind la ∞ , șirurile valorilor funcției au limite diferite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

în timp ce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există (se justifică în mod analog, considerând inversele șirurilor folosite mai sus).

Limite laterale:

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(a-0)$ (limita la stânga) și $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(a+0)$ (limita la dreapta).

Dacă f are limite laterale egale, $f(a-0) = f(a+0) = l$, atunci f are limită în a și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Dacă f are limite laterale diferite, $f(a-0) \neq f(a+0)$, atunci f nu are limită în a , adică $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nu există.

Teoremă

Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții, a un punct de acumulare al domeniului D , V_a o vecinătate a lui a (un interval centrat în a) și l un număr real. Dacă

i) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

ii) $|f(x) - l| \leq |g(x)|, (\forall) x \in V_a \cap D \setminus \{a\}$

atunci f are limită în a și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exemplu

Deoarece $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|, (\forall) x \in \mathbb{R}^*,$ rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Limite remarcabile

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p) = a_0 \cdot (\pm\infty)^p$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \frac{a_0}{b_0} (\pm\infty)^{p-q}, & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x a^{-x} = 0 \quad (a > 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^r}{\ln x} = 0 \quad (r > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $a \in D$ un *punct de acumulare* al domeniului de definiție.

Definiție

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *continuuă* în a dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ există și coincide cu valoarea funcției în a , mai precis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *continuuă pe mulțimea* $D_0 \subset D$ dacă este continuuă în fiecare punct al mulțimii D_0 .

Punctele de acumulare ale domeniului în care funcția nu este continuuă se numesc *puncte de discontinuitate*.

Funcția f prezintă o *discontinuitate de speța întâi* în a dacă are limite laterale finite și diferite în a ($f(a-0) \neq f(a+0)$) sau acestea sunt finite, egale, dar diferite de $f(a)$. Orice punct de discontinuitate care nu este de speța întâi este clasificat de speța a doua.

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este discontinuuă în $a = 0$; punctul $a = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

Prelungirea prin continuitate

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct de acumulare al domeniului D . Dacă

i) a este situat în afara domeniului de definiție D și

ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} l$ există și este finită,

atunci f se poate extinde în mod natural la $D \cup \{a\}$ prin:

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = a \end{cases}.$$

Funcția $\tilde{f}$ se numește *prelungita prin continuitate a lui f la $D \cup \{a\}$* .

Proprietăți ale funcțiilor continue

- Orice funcție continuuă pe un interval mărginit și închis este mărginită și își atinge marginile. Mai precis, oricare ar fi $x \in [a, b]$, $f(x)$ se găsește în intervalul $[m, M]$ (m și M reprezintă minimul, respectiv maximul funcției) și, în plus, există $x_m, x_M \in [a, b]$ așa încât $m = f(x_m)$, respectiv $M = f(x_M)$.

• Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și ia valori de semne diferite în capetele intervalului $[a, b]$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b) .

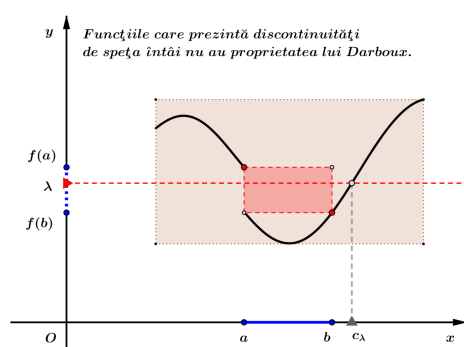
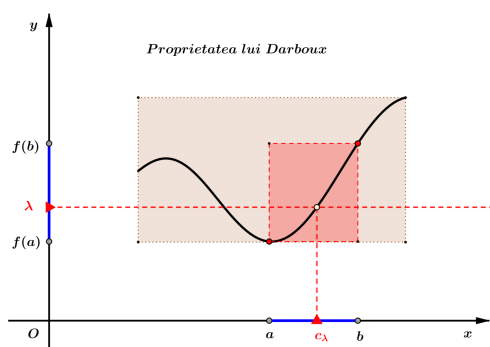
• Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I , atunci imaginea acestuia $J = f(I)$ ($= \text{Im}(f)$) este de asemenea un interval.

Observații asupra proprietății lui Darboux

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux* pe intervalul I dacă oricare ar fi $a, b \in I$ ($a < b$) și λ situat între $f(a)$ și $f(b)$, există cel puțin un punct $c_\lambda \in (a, b)$ pentru care $\lambda = f(c_\lambda)$.

Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Funcțiile discontinue care prezintă o discontinuitate de speța întâi nu au proprietatea lui Darboux.

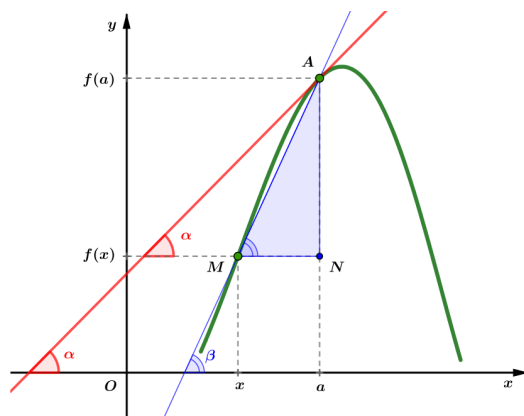


Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux, deși este discontinuă (discontinuitatea este de speța a doua!).

C. Funcții derivabile

Definiție

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este *derivabilă* în punctul a (situat în intervalul I) dacă limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{not}}{=} f'(a)$ există și este finită.



Interpretarea geometrică a derivatei

Din punct de vedere geometric, raportul $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ este tangenta unghiului $\widehat{AMN}$ (vezi figura) și urmare a trecerii la limită după $x \rightarrow a$, $f'(a)$ nu reprezintă altceva decât panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$. Cu alte cuvinte, $f'(a)$ este tangenta (trigonometrică a) unghiului pe care dreapta tangentă în punctul A îl face cu semiaxa pozitivă Ox . Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă a este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Uneori, pentru a pune în evidență și variabila independentă a funcției, se utilizează notațiile

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a), \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

O interpretare fizică a derivatei

Un mobil aflat în mișcare rectilinie parcurge în t unități de timp (secunde / minute / ore) distanța $s(t)$ (măsurată în metri / kilometri) sau, cu alte cuvinte, distanța parcursă de mobil poate fi privită ca o funcție $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă s este derivabilă pe $[0, T]$, atunci viteza sa la momentul t se definește prin $v(t) = s'(t)$, iar dacă și v este o funcție derivabilă, atunci accelerația mobilului la momentul t este $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Condiție necesară de derivabilitate

Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca propoziției este falsă: spre exemplu, funcția modul este continuă în origine fără a fi însă derivabilă.

Cum se studiază derivabilitatea unei funcții într-un punct?

- se verifică proprietatea de continuitate în punctul precizat (dacă funcția este discontinuă studiul derivabilității nu are sens);
- se calculează derivatele laterale

$$f'_s(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{și} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dacă derivatele laterale în a există, sunt finite și egale, atunci funcția f este derivabilă în a . (Pentru punctele situate la extremitățile finite ale domeniului de definiție este suficient ca una singură din derivatele laterale să existe și să fie finită). În toate celelalte situații, funcția nu este derivabilă în punctul studiat.

Tabelul derivatelor

Identitățile din tabelele ce urmează se deduc cu formula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ce rezultă din definiție prin schimbarea de variabilă $x - a = h$.

1.	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(n \in \mathbb{N})$
	$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \in \mathbb{N})$
		$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	
	$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^r$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(r \in \mathbb{R})$
		$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
		$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	

2.	$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a > 0, a \neq 1)$
		$(e^x)' = e^x$	
3.	$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(a > 0, a \neq 1)$
		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$
4.	$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	
5.	$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	
6.	$f : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
		$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	
7.	$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	
8.	$f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x \neq \pm 1)$
9.	$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x \neq \pm 1)$
10.	$f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$	

Proprietăți ale funcțiilor derivabile

$$\begin{aligned}
 (cf)'(x) &= cf'(x) & c &= \text{constantă} \\
 (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
 (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, & g(x) &\neq 0 \\
 \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)}, & g(x) &\neq 0 \\
 (f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\
 (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} & y &= f(x), \exists f^{-1} \text{ și } f'(x) \neq 0
 \end{aligned}$$

Teoremă (derivarea funcției inverse) Fie $f : I \rightarrow J$ o funcție continuă și bijectivă între două intervale.

Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și, în plus, $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Prin urmare, oricărui punct x din intervalul I îi corespunde un unic punct $y = f(x)$ în intervalul J și reciproc, oricărui punct y din J îi corespunde în mod unic $x = f^{-1}(y)$ din I ; dacă f este continuă pe I și derivabilă în punctul x_0 , cu derivata $\frac{df}{dx}(x_0)$ nenulă, atunci funcția inversă f^{-1} este și ea derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și derivata sa în y_0 , $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0)$, se calculează cu ajutorul derivatei lui f în x_0 după cum urmează

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}.$$

Această reformulare a egalității din enunțul teoremei este mult mai precisă deoarece evidențiază variabilele de derivare: f se derivează în raport cu $x \in I$, pe când $g = f^{-1}$ se derivează în raport cu $y \in J$.

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe intervalul I , atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I .

Derivate de ordin superior

O funcție reală este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ dacă este derivabilă în fiecare punct din I și, în plus, derivata sa f' este continuă pe I . Mulțimea funcțiilor de clasă $\mathcal{C}^1$ pe I se notează cu $\mathcal{C}_I^1$, iar $\mathcal{C}_I^0$ desemnează în mod natural clasa funcțiilor continue pe intervalul I .

În general, pentru un indice $n \in \mathbb{N}$ fixat, spunem că f este o funcție de clasă $\mathcal{C}^n$ (notație $f \in \mathcal{C}_I^n$) dacă f e derivabilă de n ori pe I cu derivata $f^{(n)}$ continuă. Mai mult, spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe I dacă f este o funcție de clasă $\mathcal{C}^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Funcțiile elementare, cum ar fi e^x , $\cos x$, $\sin x$, polinoamele de orice grad, logaritmul (indiferent de bază), sunt funcții de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe domeniul lor maxim de definiție.

Tabelul derivatelor de ordinul n

$(x^p)^{(n)}$	$= p(p-1) \cdots (p-n+1) x^{p-n}$	$p \geq n, \quad (p \in \mathbb{N})$
	$= 0$	$p < n, \quad (p \in \mathbb{N})$
$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}$	$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$	$(x \neq 0)$
$(e^x)^{(n)}$	$= e^x$	
$(\sin x)^{(n)}$	$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$(\cos x)^{(n)}$	$= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$((1+x)^r)^{(n)}$	$= r(r-1) \cdots (r-n+1) (1+x)^{r-n}$	$(x > -1, \quad r \in \mathbb{R})$

Aplicațiile derivatei

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct al domeniului de definiție D .

Punctul a este *punct de extrem local* pentru f dacă există o vecinătate a sa V_a în care creșterea funcției $f(x) - f(a)$ are semn constant; cu alte cuvinte, există $r > 0$ a.î.

$$\text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{const.} \quad (\forall) x \in (a-r, a+r) \cap D.$$

Mai precis,

$$\begin{aligned} a \text{ este } \textit{minim local} & \quad \text{d.d.} \quad f(x) - f(a) \geq 0, \\ a \text{ este } \textit{maxim local} & \quad \text{d.d.} \quad f(x) - f(a) \leq 0 \end{aligned} \quad (\forall) x \in (a-r, a+r) \cap D.$$

Teorema lui Fermat

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct din domeniul de definiție D .

$$\text{Dacă } \begin{cases} a \text{ este punct interior lui } D \\ a \text{ este punct de extrem local} \\ f \text{ este derivabilă în } a \end{cases} \quad , \quad \text{atunci} \quad f'(a) = 0.$$

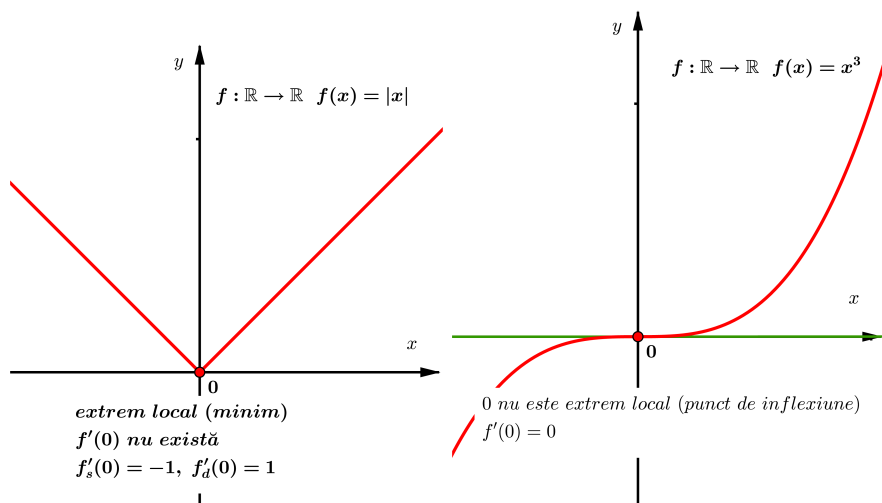
Interpretarea geometrică

Tangenta la graficul funcției într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de definiție al unei funcții derivabile este paralelă cu axa Ox .

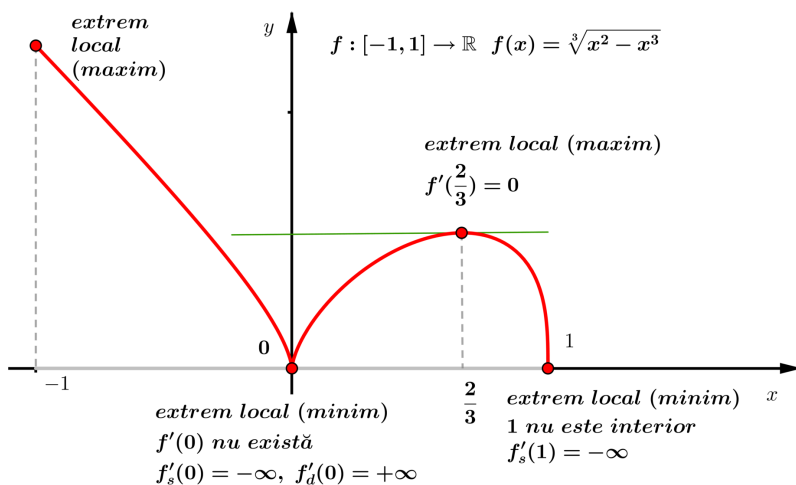
Punctul x_0 este un *punct critic* (staționar) al funcției derivabile f dacă $f'(x_0) = 0$.

Conform teoremei lui Fermat, punctele de extrem local din interiorul domeniului de definiție al unei funcții derivabile se găsesc printre punctele critice ale respectivei funcții.

Este posibil ca x_0 să fie punct de extrem local, dar funcția f să nu fie derivabilă în x_0 . De asemenea, este posibil ca $f'(x_0) = 0$, dar x_0 să nu fie punct de extrem local al funcției f :



Capetele închise ale domeniului de definiție sunt puncte de extrem local:



Fie funcția $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval.

1. Dacă $a \in I$ este punct de extrem local al funcției f , atunci punctul $(a, f(a))$ este *punct de extrem local al graficului funcției*.

Fie b un punct situat în interiorul intervalului I ; notăm $b \in \text{int}(I)$.

2. Punctul $(b, f(b))$ se numește *punct unghiular al graficului funcției* dacă:

- i) f este continuă în b ,
- ii) f are derivate laterale diferite în b ($f'_s(b) \neq f'_d(b)$), cel puțin una dintre ele finită.

3. Punctul $(b, f(b))$ se numește *punct de întoarcere al graficului funcției* dacă:

- i) f este continuă în b ,
- ii) f are derivate laterale în b infinite și diferite ($f'_s(b) = -\infty$, $f'_d(b) = \infty$ sau $f'_s(b) = \infty$, $f'_d(b) = -\infty$).

4. Punctul $b \in \text{int}(I)$ se numește *punct de inflexiune al funcției* dacă:

- i) f este continuă în b ,
- ii) f are derivată în b , finită sau infinită,
- iii) f își schimbă convexitatea² în b .

Punctul $(b, f(b))$ este *punct de inflexiune al graficului funcției*.

În particular, dacă derivatele laterale ale funcției sunt infinite și egale ($f'_s(b) = f'_d(b) = \infty$ sau $f'_s(b) = f'_d(b) = -\infty$), atunci $(b, f(b))$ este *punct de inflexiune cu tangentă verticală al graficului funcției*.

Teorema lui Rolle

$$\text{Dacă } \begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad , \quad \text{atunci} \quad (\exists) c \in (a, b) \text{ a.î. } f'(c) = 0.$$

²Dacă o funcție f este derivabilă pe interiorul intervalului I , atunci f este convexă (respectiv concavă) pe $\text{int}(I)$ dacă și numai dacă derivata sa f' este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe $\text{int}(I)$.

În particular, dacă $f(a) = f(b) = 0$, teorema afirmă că între două rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a derivatei.

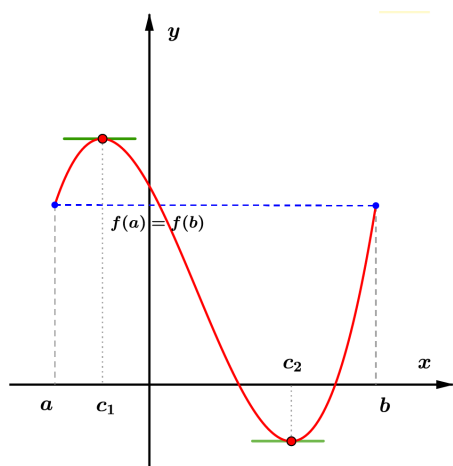
Reciproc, între două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă funcția își schimbă semnul, există o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Aplicație: Separarea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ cu ajutorul șirului lui Rolle

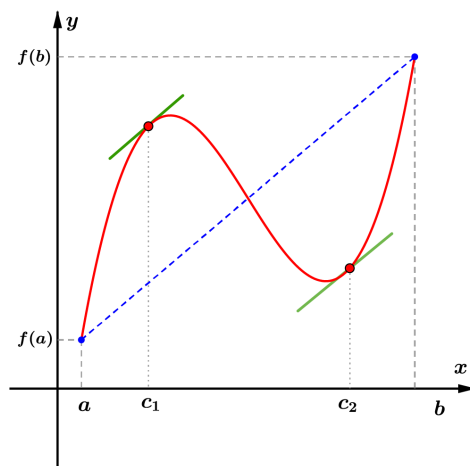
Dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și derivabilă (extremitățile intervalului pot fi infinite) și $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ sunt soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, atunci orice schimbare a semnului în șirul lui Rolle dat de linia a doua a tabelului

x	a	c_1	$\dots$	c_k	b
$\text{sign}(f(x))$	$\text{sign}(f(a+0))$	$\text{sign}(f(c_1))$		$\text{sign}(f(c_k))$	$\text{sign}(f(b-0))$

indică intervalele ce conțin câte o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.



Teorema lui Rolle



Teorema lui Lagrange

Teorema lui Lagrange

Dacă $\begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \end{cases}$, atunci $(\exists) c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretarea geometrică

Există cel puțin un punct $(c, f(c))$, situat pe graficul funcției, în care tangenta este paralelă cu coarda ce unește extremitățile $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Consecințe

Orice funcție derivabilă pe un interval cu derivata pozitivă (negativă) este crescătoare (descrescătoare) pe acel interval.

Dacă derivata unei funcții este nulă pe un interval, atunci funcția este constantă pe acel interval:

$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe intervalul $I \subset D$

$$f'(x) = 0 \quad (\forall) x \in I \Rightarrow f(x) = c \text{ (constantă) pe } I.$$

Limite de funcții (completări)

Calculul limitelor de funcții conduce cel mai adesea la situații exceptate de la regulile de calcul algebric, cum ar fi $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, și este nevoie de multă îndemânare pentru evitarea lor. În condiții rezonabile de derivabilitate a termenilor, *regula lui l'Hospital* poate fi de mare ajutor dacă este aplicată corect și cu discernământ. Pe scurt, *regula lui l'Hospital* reduce calculul limitei

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (a , finit sau infinit) aflată într-una din situațiile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, la calculul limitei (uneori mai simple) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mai precis, dacă

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finit sau infinit), atunci și $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Altfel spus,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă limita raportului derivatelor există.

Example

a) $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 + x - 5)}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$, nedeterminare. Se calculează

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\ln(x^2 + x - 5))'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x(x^2 + x - 5)} = \frac{5}{4}.$$

Conform regulii lui l'Hospital, rezultă $L = \frac{5}{4}$.

$$\text{b) } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \sin^2(x^2)}{\ln(1 + \sin^4 x)} = \frac{0}{0}, \text{ nedeterminare.}$$

Limita raportului derivatelor este dificil de calculat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x^4 + \sin^2 x^2))'}{(\ln(1 + \sin^4 x))'} = \dots \text{ (dar nu imposibil de calculat).}$$

Este recomandată metoda directă, bazată pe utilizarea limitelor remarcabile evidențiate mai sus:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \sin^2(x^2)}{\ln(1 + \sin^4 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^2}{\frac{\ln(1 + \sin^4 x)}{\sin^4 x}} = 1 \cdot \frac{1 + 1^2}{1} = 2.$$

$$\text{c) } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}, \text{ nedeterminare. (Am văzut că } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.)$$

Limita raportului derivatelor nu există

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ nu există.

Totuși limita există:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{d) } L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ nedeterminare.}$$

Utilizarea (fără discernământ) a regulii lui l'Hospital nu duce la niciun rezultat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{x^2 + 1})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Totuși limita poate fi calculată cu metoda factorului forțat:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Ghid pentru reprezentarea grafică a funcțiilor

Etapele reprezentării grafice a funcțiilor reale de variabilă reală

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dots$$

1. Stabilirea domeniului maxim de definiție E

Domeniul maxim de definiție E este alcătuit din toate numerele reale x pentru care expresia $f(x)$ are sens și este finită: $E = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Mulțimea E este, de regulă, o reuniune de intervale și, eventual, de puncte "izolate".

2. Limitele funcției la extremitățile (finite și/sau infinite) ale intervalelor din E

Domeniul de continuitate: $E_c = \{x \mid x \in E \text{ și } f \text{ este continuă în } x\}$ este o reuniune de intervale deschise sau închise.

Asimptote verticale:

Fie a o extremitate de interval al domeniului E_c , $a \neq \pm\infty$;

$x = a$ este *asimptotă verticală la stânga* dacă limita laterală $f(a-0)$ este infinită.

$x = a$ este *asimptotă verticală la dreapta* dacă limita laterală $f(a+0)$ este infinită.

$x = a$ este *asimptotă verticală* dacă este asimptotă verticală la stânga sau asimptotă verticală la dreapta.

Asimptote oblice (sau, în particular, *orizontale*) se calculează separat în $-\infty$ și ∞ , dacă acestea sunt extremități ale domeniului de definiție:

$y = n$ este *asimptotă orizontală* dacă $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n$ sau $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = n$, cu $n \in \mathbb{R}$.

$y = mx + n$ este *asimptotă oblică* dacă $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ este infinită sau nu există, dar $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ există și sunt finite, cu $m \neq 0$.

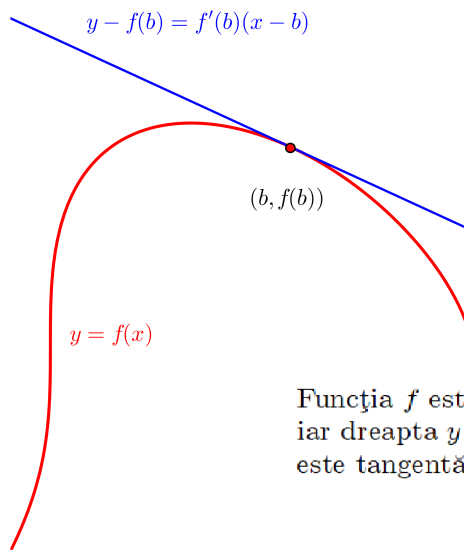
3. Studiul derivatei întâi

Calculul derivatei întâi $f'(x)$.

Domeniul de derivabilitate este domeniul maxim de existență al expresiei $f'(x)$: $E_d = \{x \mid x \in E_c \text{ și } f \text{ este derivabilă în } x\}$.

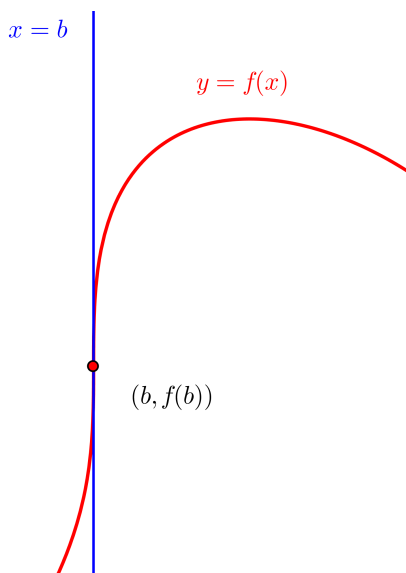
Practic, pentru precizarea domeniului E_d , se calculează derivatele laterale $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ în acele puncte b ale domeniului de continuitate E_c în care există dubii asupra existenței expresiei $f'(x)$.

• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt finite și egale, atunci b aparține domeniului de derivabilitate E_d .

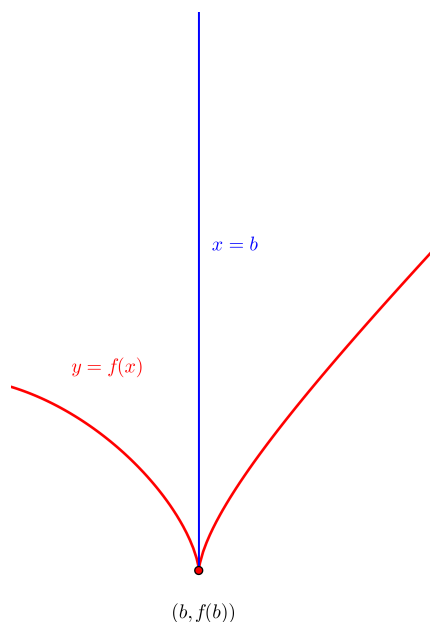


Funcția f este derivabilă în punctul b iar dreapta $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ este tangentă în punctul $(b, f(b))$.

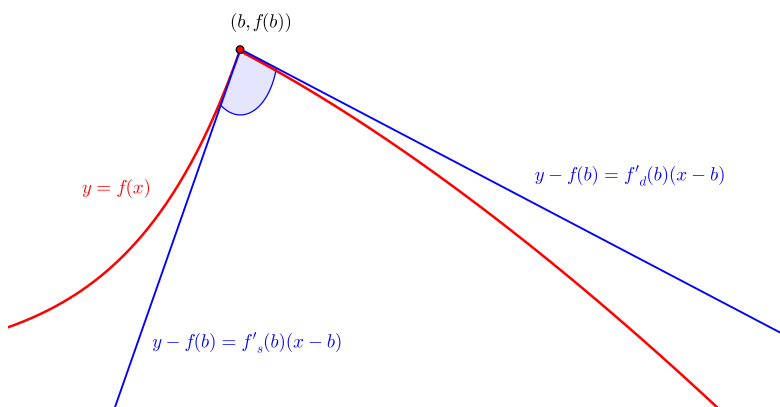
• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt infinite și egale, atunci f **nu** este derivabilă în b , iar dreapta $x = b$ este tangentă verticală. Punctul $(b, f(b))$ este un *punct de inflexiune cu tangentă verticală* al graficului.



• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt infinite și diferite, atunci f **nu** este derivabilă în b , $(b, f(b))$ este un *punct de întoarcere* al graficului, iar semidreapta $x = b$ (cu $y \geq f(b)$ sau cu $y \leq f(b)$, după caz) este semitangentă verticală.



• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt finite și diferite sau cel puțin una dintre derivatele laterale este finită, atunci funcția **nu** este derivabilă în b , iar $(b, f(b))$ este un *punct unghiular* al graficului.



Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. Soluțiile acestei ecuații (zerourile derivatei) se numesc *puncte critice* sau *staționare* ale funcției f .

Importanța studiului amănunțit al derivatei întâi constă în următoarele:

-*punctele de extrem* ale funcției se găsesc printre punctele sale critice, unghiulare sau de întoarcere;

-*semnul* derivatei întâi oferă informații despre intervalele de monotonie:

$$f'(x) \geq 0 \text{ pe intervalul } I \subset E_d \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } I,$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ pe intervalul } I \subset E_d \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } I.$$

4. Studiul derivatei a doua

Calculul derivatei a doua $f''(x)$.

Precizarea domeniului maxim de existență al expresiei $f''(x)$.

Se determină soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ (zerourile derivatei a doua).

Punctele de inflexiune ale funcției se găsesc printre zerourile derivatei a doua sau printre punctele în care f are derivată (finită sau infinită), dar nu este derivabilă de două ori.

Semnul derivatei a doua stabilește intervalele pe care funcția este concavă sau convexă:

$$f''(x) \geq 0 \text{ pe intervalul } I \Rightarrow f \text{ este convexă pe } I,$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ pe intervalul } I \Rightarrow f \text{ este concavă pe } I.$$

Dacă expresia $f'(x)$ are o formă complicată (calculul lui $f''(x)$ ia mult timp) sau ecuația $f''(x) = 0$ este dificil de rezolvat, se poate renunța la studiul derivatei a doua.

5. Tabelul de variație al funcției

x	Se așază crescător punctele importante determinate mai sus.
$f'(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidențiat la pasul 3.
$f''(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidențiat la pasul 4.
$f(x)$	Pe fiecare interval se trasează săgețile ce indică monotonia și forma ramurilor ce alcătuiesc graficul funcției, respectând următoarele reguli:

x	
$f'(x)$	+
$f''(x)$	+
$f(x)$	



Crescătoare,
convexă

x	
$f'(x)$	+
$f''(x)$	-
$f(x)$	



Crescătoare,
concavă

x	
$f'(x)$	-
$f''(x)$	+
$f(x)$	



Descrescătoare,
convexă

x	
$f'(x)$	-
$f''(x)$	-
$f(x)$	



Descrescătoare,
concavă

6. Valori importante

Se calculează coordonatele punctelor în care funcția nu este continuă, nu este derivabilă, ale punctelor critice și ale punctelor de inflexiune. Valorile găsite se trec în tabelul de variație al funcției.

Se calculează coordonatele punctelor de intersecție cu axele:

$$\cap Ox : y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{se rețin doar valorile } x \in E).$$

$$\cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = f(0) \quad (\text{doar dacă } 0 \in E).$$

7. Reprezentarea grafică

- se trasează axele de coordonate,
- se stabilește unitatea de măsură pe fiecare axă în parte,
- se trasează asimptotele și tangentele verticale,
- se evidențiază punctele importante ale căror coordonate au fost calculate mai sus,
- se trasează graficul funcției conform tabelului de variație.

8. Observații

Se studiază eventualele simetrii ale graficului.

• Dacă f este o funcție *pară*, adică $f(-x) = f(x) \quad (\forall) x \in E$, atunci graficul funcției este *simetric față de axa Oy*.

• Dacă f este o funcție *impară*, adică $f(-x) = -f(x) \quad (\forall) x \in E$, atunci graficul funcției este *simetric față de origine*.

Se studiază periodicitatea.

Funcția f este *periodică cu perioada* T dacă $f(x+T) = f(x)$ ($\forall x \in E$; cel mai mic număr pozitiv T cu această proprietate (dacă există) se numește *perioada principală*).

Se determină imaginea funcției: $\text{Im} f = \{y \mid (\exists) x \in E \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Exemplul 1 Reprezentarea grafică a funcției

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x|x|}{3x-10}.$$

1. Domeniul maxim de definiție $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{10}{3}\}$

Numitorul fracției trebuie să fie diferit de zero: $3x - 10 \neq 0$, prin urmare $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{10}{3}\}$.

2. Limitele funcției la extremitățile (finite și infinite) ale intervalelor din E

Domeniului de continuitate: $E_c = E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{10}{3}\} = (-\infty, \frac{10}{3}) \cup (\frac{10}{3}, +\infty)$, deoarece f este compusă de funcții continue; prin explicitarea modulului, expresia sa devine

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{3x-10} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{3x-10} & , \quad x \in [0, \frac{10}{3}) \cup (\frac{10}{3}, +\infty) \end{cases}$$

Funcția f este *continuă* în $x = 0$ deoarece $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$.

Limitele laterale în punctul de abscisă $\frac{10}{3}$ sunt

$$f\left(\frac{10}{3}-0\right) = \frac{\frac{100}{9}}{0_-} = -\infty, \quad f\left(\frac{10}{3}+0\right) = \frac{\frac{100}{9}}{0_+} = +\infty.$$

Dreapta $x = \frac{10}{3}$ este *asimptotă verticală* la graficul funcției (atât la stânga, cât și la dreapta).

Limitele la $\pm\infty$ sunt infinite și diferite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{3x-10} = \frac{-1}{3}(-\infty)^1 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x-10} = \frac{1}{3}(+\infty)^1 = +\infty,$$

prin urmare nu există asimptote orizontale.

Existența asimptotelor oblice se studiază pe fiecare ramură în parte.

$$y = mx + n$$

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{(3x-10)x} = -\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{3x-10} + \frac{1}{3}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 3x^2 - 10x}{3(3x-10)} = -\frac{10}{9}, \end{aligned}$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(3x-10)x} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{3x-10} - \frac{1}{3}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x^2 + 10x}{3(3x-10)} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Dreapta $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$ este *asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$* .

Dreapta $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{9}$ este *asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$* .

3. Studiul derivatei întâi

Pentru început se calculează

$$\left(\frac{x^2}{3x-10} \right)' = \frac{2x(3x-10) - 3x^2}{(3x-10)^2} = \frac{3x^2 - 20x}{(3x-10)^2};$$

rezultă expresia derivatei întâi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-3x^2 + 20x}{(3x-10)^2} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{3x^2 - 20x}{(3x-10)^2} & , \quad x \in [0, \frac{10}{3}) \cup (\frac{10}{3}, +\infty) \end{cases}$$

Funcția f este derivabilă în punctul $x = 0$ deoarece $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$.

Domeniului de derivabilitate coincide cu domeniul maxim de definiție E .

Punctele critice ale funcției f sunt rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$, adică

$$3x^2 - 20x = 0. \text{ Rezultă } x = 0 \text{ și } x = \frac{20}{3}.$$

4. Studiul derivatei a doua

Din

$$\left(\frac{3x^2 - 20x}{(3x - 10)^2} \right)' = \frac{200}{(3x - 10)^3}$$

rezultă expresia derivatei a doua

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-200}{(3x - 10)^3} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{200}{(3x - 10)^3} & , \quad x \in (0, \frac{10}{3}) \cup (\frac{10}{3}, +\infty) \end{cases}.$$

Funcția f nu este derivabilă de două ori în $x = 0$ deoarece derivatele laterale sunt diferite: $f''_s(0) = \frac{1}{5}$, iar $f''_d(0) = -\frac{1}{5}$.

Ecuția $f''(x) = 0$ nu are soluție.

5. Tabelul de variație al funcției

x	$-\infty$	0	$\frac{10}{3}-0$	$\frac{10}{3}+0$	$\frac{20}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	—	—	0	+
$f''(x)$	+		—	+	+	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{40}{9}$	$+\infty$
↘ inflexiune ↘ ↘ min ↘						

6. Valori importante

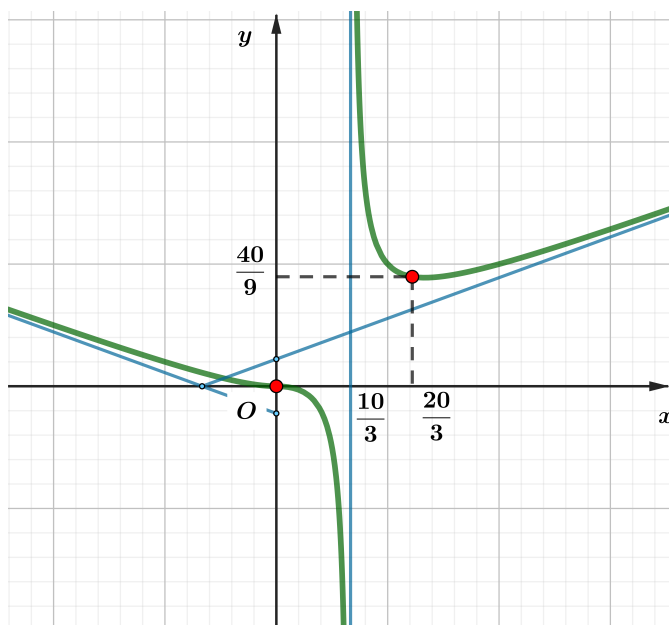
$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{40}{9}$$

Coordonatele punctelor de intersecție cu axele:

$$\cap Ox : \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x|x|}{3x - 10} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\cap Oy : \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0.$$

7. Reprezentarea grafică



8. *Observație* Imaginea funcției: $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

Exemplul 2 Reprezentarea grafică a funcției

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}.$$

1. *Domeniul maxim de definiție* $E = \mathbb{R}$

2. *Limitele funcției la extremitățile (finite/infinite) ale intervalelor din E*

Domeniului de continuitate: $E_c = E = \mathbb{R}$ deoarece f este compusă de funcții continue.

Limitele la $\pm\infty$ sunt infinite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = \mp\infty,$$

prin urmare nu există asimptote orizontale.

Existența asimptotei oblice:

$$y = mx + n,$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2 - x} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{\left(\frac{6}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + 1 \right)} = 2.$$

Dreapta $y = -x + 2$ este *asimptotă oblică* la graficul funcției, atât spre $-\infty$, cât și spre ∞ .

3. *Studiul derivatei întâi*

$$f'(x) = \frac{12x-3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}} = \frac{x(4-x)}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^2}} = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}} \text{ unde } x \neq 0 \text{ și } x \neq 6.$$

Se studiază derivabilitatea în punctele $x = 0$ și $x = 6$.

$$f'_s(0) = \frac{4}{\sqrt[3]{0_- \cdot 36}} = -\infty \text{ și } f'_d(0) = \frac{4}{\sqrt[3]{0_+ \cdot 36}} = +\infty$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

Dreapta $x = 0$ este *tangentă verticală* la stânga și la dreapta la graficul funcției.

Punctul $(0, f(0)) = (0, 0)$ este *punct de întoarcere* al graficului.

$$f'_s(6) = \frac{-2}{\sqrt[3]{6 \cdot (0_+)^2}} = -\infty \text{ și } f'_d(6) = \frac{-2}{\sqrt[3]{6 \cdot (0_-)^2}} = -\infty$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 6$.

Dreapta $x = 6$ este *tangentă verticală* la graficul funcției.

Punctul $(6, f(6)) = (6, 0)$ este *punct de inflexiune* al graficului.

În concluzie, *domeniului de derivabilitate* al funcției este $E_d = \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$.

Punctul critic ale funcției f este soluția ecuației $f'(x) = 0$: $x = 4$.

4. *Studiul derivatei a doua*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\sqrt[3]{x(6-x)^2} - (4-x) \frac{(6-x)^2 + x2(6-x)(-1)}{3\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}} = \frac{-3x(6-x)^2 - (4-x)(6-x)(6-3x)}{3\sqrt[3]{x^4(6-x)^8}} = \\ &= \frac{-3(6-x)(x(6-x) + (4-x)(2-x))}{3x(6-x)^2 \sqrt[3]{x(6-x)^2}} = \frac{-(6x-x^2+8-2x-4x+x^2)}{x(6-x) \sqrt[3]{x(6-x)^2}} = \frac{-8}{x(6-x) \sqrt[3]{x(6-x)^2}}. \end{aligned}$$

Ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluție.

5. *Tabelul de variație al funcției*

x	$-\infty$	0	4	6	$+\infty$
$f'(x)$	—		+	0	—
$f''(x)$	—		—	—	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$2\sqrt[3]{4}$	0	$-\infty$

6. *Valori importante*

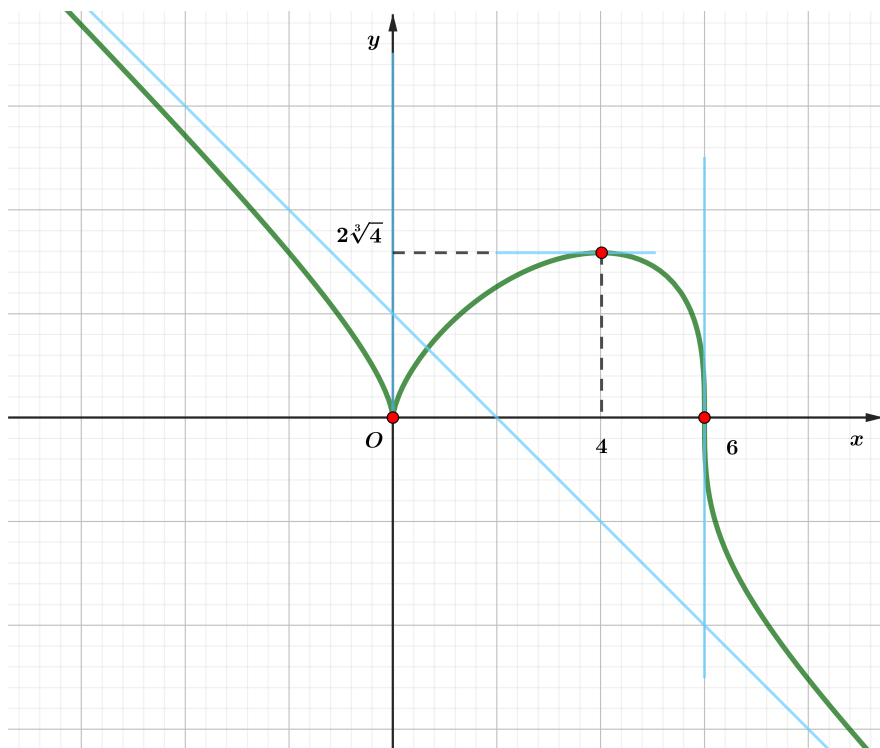
$$f(0) = 0, \quad f(4) = 2\sqrt[3]{4}, \quad f(6) = 0$$

Coordonatele punctelor de intersecție cu axele:

$$\cap Ox : \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = 0 : x = 0, x = 6.$$

$$\cap Oy : \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0.$$

7. *Reprezentarea grafică*



8. *Observație* Imaginea funcției: $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

D. Integrabilitate și aplicații

Definiție

Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$, interval) este *primitivabilă* dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, numită *primitivă* lui f , având proprietățile:

- (i) F este derivabilă pe I
- (ii) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in I$.

Mulțimea tuturor primitivelor lui f este notată prin $\int f(x) dx$, ce se citește ”*integrala nedefinită a lui f în raport cu x* ”. Întrucât orice două primitive ale aceleiași funcții primitivabile diferă printr-o constantă (f este definită pe un interval !), pentru determinarea integralei nedefinite este suficientă găsirea unei singure primitive F . Are loc egalitatea de mulțimi

$$\int f(x) dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C}$ reprezintă mulțimea funcțiilor reale constante definite pe I .

Proprietatea (ii) din definiție permite alcătuirea unui tabel cu integrale nedefinite a cărui consultare atentă reprezintă o primă metodă de primitivare. În plus, din (ii) rezultă și proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

oricare ar fi $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, primitivabile și α, β numere reale.

Tabelul primitivelor elementare³

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq (0, \infty), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + \mathcal{C}, \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq (0, \infty)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}, \quad a > 0$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

³ I reprezintă intervalul de integrare.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad x \in I \subseteq (-a, a), a > 0$$

În practică își dovedesc utilitatea și următoarele trei formule de integrare, ce se pot verifica imediat prin derivarea membrului drept:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + \mathcal{C}; \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + \mathcal{C};$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + \mathcal{C}, a > 0.$$

Problema A

Cum se poate decide dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, interval) este sau nu primitivabilă?

Direct, problema poate fi rezolvată intuind (de exemplu cu ajutorul tabelului) forma pe care ar trebui s-o aibă primitiva F și verificând dacă sunt sau nu îndeplinite condițiile (i) și (ii) din definiție.

Posibilitatea rezolvării indirecte a problemei **A** se bazează pe următoarele rezultate:

- Orice funcție reală continuă pe intervalul $D \subseteq \mathbb{R}$ este primitivabilă pe D .
- Dacă f este o funcție reală primitivabilă pe intervalul $D \subseteq \mathbb{R}$, atunci din identitatea $f = F'$ rezultă imediat că f are proprietatea lui Darboux pe D .

a) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul D , atunci f nu este primitivabilă pe D .

b) Dacă f are în punctul x_0 al intervalului D o discontinuitate de speța I (adică limitele laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ sunt finite, dar diferite), atunci f nu este primitivabilă pe D .

Astfel, pentru a dovedi primitivabilitatea unei funcții este suficient (nu și necesar) să se verifice continuitatea sa, ceea ce este mult mai comod în comparație cu verificarea condițiilor (i) și (ii) ale definiției.

Pentru a dovedi neprimitivabilitatea unei funcții este suficient (nu și necesar) să se verifice că f nu posedă proprietatea lui Darboux, adică faptul că există un interval $D_0 \subset D$ a cărui imagine prin f ,

$$f(D_0) = \{y \mid y \in \mathbb{R}, (\exists)x_0 \in D_0 : y = f(x_0)\},$$

nu este interval.

Problema B

Cum poate fi determinată integrala nedefinită $\mathcal{I} = \int f(x) dx$ a funcției primitivabile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, interval)?

O primă metodă o constituie, așa cum remarcam înainte, consultarea atentă a tabelului cu primitivele unor funcții elementare. Descriem în continuare câteva procedee de calcul a integralei nedefinite utile în rezolvarea problemelor.

Metode de integrare

METODA INTEGRĂRII PRIN PĂRȚI

Dacă f se poate exprima sub forma

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

cu $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile cu derivate continue, atunci

$$\mathcal{I} = \int f(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx = \dots = F(x) + C$$

(cu alte cuvinte, calculul integralei inițiale $\int u(x) \cdot v'(x) dx$ se reduce la cel al integralei $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ care, la o alegere judicioasă a funcțiilor u și v , poate fi mai simplă).

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (1)

Dacă f se poate exprima sub forma:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

unde $\varphi : D \rightarrow E$ ($E \subseteq \mathbb{R}$ interval) este derivabilă, iar $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ este primitivabilă cu primitiva G , atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x) dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx,$$

prin schimbarea de variabilă $t = \varphi(x)$, se reduce la calculul integralei nedefinite:

$$\mathcal{I}_t = \int g(t) dt = \dots = G(t) + C$$

și în final

$$\mathcal{I} = G(\varphi(x)) + C.$$

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (2)

Dacă $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$, interval) este bijectivă și derivabilă iar $(f \circ \Psi) \cdot \Psi'$ este primitivabilă pe E cu primitiva H , atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x) dx$$

se reduce prin schimbarea de variabilă (substituția) $x = \Psi(t)$ la cel al integralei

$$\mathcal{I}_t = \int f(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t) dt = \dots = H(t) + C,$$

iar în final, revenind la variabila inițială (în baza bijectivității lui Ψ , $t = \Psi^{-1}(x)$), se obține:

$$\mathcal{I} = H(\Psi^{-1}(x)) + C.$$

Substituții remarcabile

Utilizarea formei canonice a trinomului de gradul al-II-lea

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{4a}{4a} (ax^2 + bx + c) = \frac{1}{4a} (4a^2x^2 + 4abx + 4ac) = \\ &= \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 - \Delta] \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_x = \int f(ax^2 + bx + c) dx \quad \text{cu } f \text{ integrabilă}$$

$$t = 2ax + b \Rightarrow \mathcal{I}_t = \frac{1}{2a} \int g(t) dt, \quad \text{unde } g(t) = f\left(\frac{t^2 - \Delta}{4a}\right).$$

Primitivarea funcțiilor raționale

$$\mathcal{I} = \int R(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$$grP \geq grQ \Rightarrow R = C + \frac{\rho}{Q} \quad (\rho, \text{restul}) \Rightarrow \mathcal{I} = \int C(x) dx + \int \frac{\rho(x)}{Q(x)} dx$$

$$grP < grQ \Rightarrow Q \quad \text{se descompune în produs de factori de gr.I și II la diverse puteri}$$

$$R = \frac{P}{Q} \text{ se descompune în fracții simple de forma } \frac{A}{(ax+b)^n}, \text{ respectiv } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} \text{ (cu } \Delta < 0),$$

care se vor primitiva fiecare în parte

Substituții trigonometrice pentru eliminarea radicalului

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &: x = a \cdot \sin t \\ \int f(\sqrt{x^2 + a^2}) dx &: x = a \cdot \operatorname{tg} t \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &: x = \frac{a}{\cos t} \end{aligned}$$

Substituțiile lui Euler

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad R \text{ rațională}$$
$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow t \pm \sqrt{ax} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ \Delta > 0 \Rightarrow t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}} \end{cases}$$

Integrale reductibile la integrale de funcții raționale

$$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad R \text{ rațională}$$

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{unde } m = [p, \dots, q]$$

reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor $p, \dots, q$.

$$\int R(e^x) dx, \quad R \text{ rațională} : t = e^x$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx, \quad R \text{ rațională} \quad \begin{cases} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ R(u, -v) = -R(u, v) \Rightarrow t = \cos x \\ R(-u, v) = -R(u, v) \Rightarrow t = \sin x \\ R(-u, -v) = R(u, v) \Rightarrow t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Precizăm în încheiere că alegerea schimbării de variabilă ține de imaginația și experiența rezolvitorului care poate aborda o aceeași problemă prin două sau chiar mai multe modalități. Este interesant să comparați în asemenea situații rezultatele obținute și să explicați diferențele remarcate. De asemenea, este util ca la integralele nedefinite întâlnite să reflectați asupra intervalelor maxime pe care sunt definite funcțiile de sub semnul integralei.

Construcția integralei definite

Oricărei funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i se poate atașa un număr real σ_f după cum urmează:

- se construiește o *diviziune* a intervalului de definiție:

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

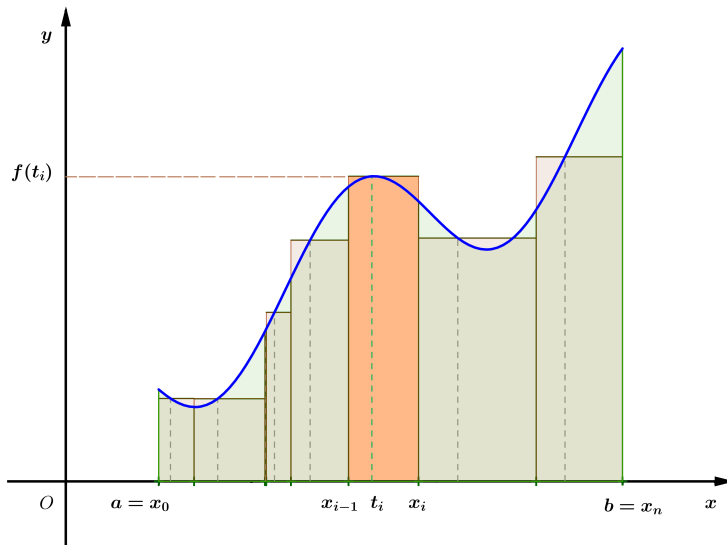
- se alege un *sistem de puncte intermediare* diviziunii:

$$(\tau) \quad \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n}),$$

- se definește

$$\sigma_f(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Numărul $\sigma_f(\Delta, \tau)$ se numește *suma integrală Riemann* a lui f relativ la diviziunea (Δ) și sistemul de puncte intermediare (τ) . Din punct de vedere geometric, pentru funcții pozitive, acest număr reprezintă o aproximare a ariei "de sub grafic".



Definiție

Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (în sens Riemann) dacă există un număr real $\mathbb{I}$ care verifică următoarea proprietate:

”pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ așa încât oricare ar fi diviziunea (Δ) cu norma $\mu(\Delta) := \max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon$ și oricare ar fi sistemul de puncte (τ) , intermediare diviziunii (Δ) , are loc inegalitatea $|\sigma_f(\Delta, \tau) - \mathbb{I}| < \varepsilon$ ”.

Numărul $\mathbb{I}$, dacă există, se notează $\int_a^b f(x) dx$ și reprezintă ”*integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$ în raport cu variabila x* ”.

În cazul particular al partiției uniforme cu norma $\frac{b-a}{n}$ rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Problema C

Cum se poate decide dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este sau nu integrabilă?

Utilizarea definiției, deși incomodă, este uneori inevitabilă.

Următoarele rezultate sunt utile pentru evitarea definiției în studiul integrabilității:

- Oricare funcție integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.
- Funcțiile reale nemărginite nu sunt integrabile.
- Orice funcție reală monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.
- Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, iar punctele de discontinuitate x_i ($i = \overline{1, k}$) sunt toate de speța întâi ($f(x_i - 0)$ și $f(x_i + 0)$ există, sunt finite, dar diferite), atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Problema D

Cum poate fi calculată integrala definită $\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx$?

Pentru a calcula integralele este bine să cunoașteți:

a) *Proprietatea de liniaritate:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) *Proprietatea de aditivitate la interval:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

unde g este integrabilă, iar $c \in (a, b)$.

Formula lui Leibniz-Newton

Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și primitivabilă, iar F este o primitivă a sa, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Există funcții integrabile care nu sunt primitivabile ceea ce face ca formula să nu poată fi aplicată. Un caz aparte, în care nu se poate utiliza (direct) formula, este acela al integralei unei funcții, integrabile și primitivabile, a cărei primitivă nu este exprimabilă prin funcții elementare. Asemenea funcții sunt e^{-x^2} , $\cos x^2$, $\frac{\sin x}{x}$.

METODE DE INTEGRARE

Integrarea prin părți se aplică dacă $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \dots$$

Schimbarea de variabilă (1) se aplică dacă $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$:

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{și} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

Schimbarea de variabilă (2) se aplică dacă $f(x)$ are o formă specială (vezi lista substituțiilor remarcabile):

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx$$

$$t = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(t) \quad (\psi = \varphi^{-1})$$

$$x = \psi(t) \Rightarrow dx = \psi'(t) dt$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{și} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

Proprietățile integralei definite*Teoremă*

Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci

i) f este integrabilă pe $[a, b]$,

ii) f este primitivabilă pe $[a, b]$, iar $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este o primitivă a lui f .

Pentru orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

Observație

Integrarea și derivarea sunt operații ”inverse” una celeilalte în sensul că

$$\int g'(x) dx = g(x) + \mathcal{C} \quad \text{și} \quad \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = g(x).$$

Teoremă

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Dacă

$$f(x) \leq g(x), \quad (\forall) x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

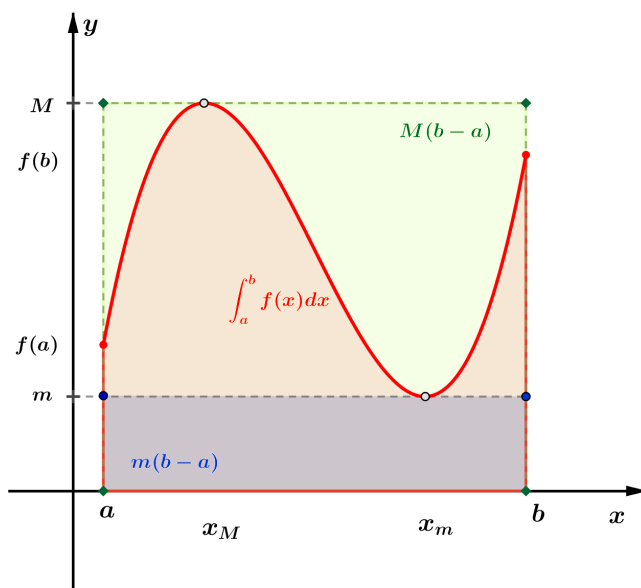
Teoremă

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), M = \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

atunci

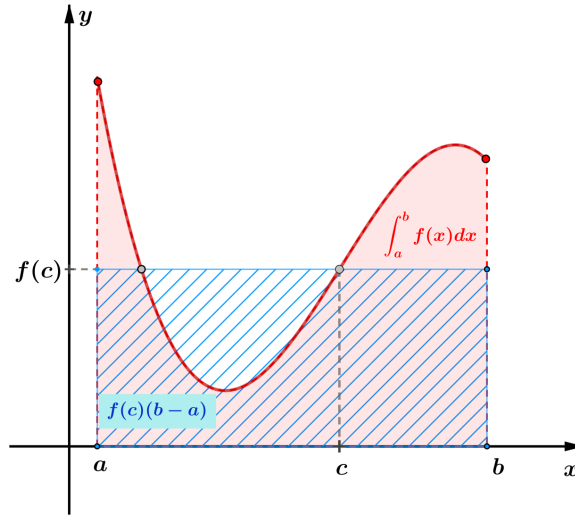
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$



Teoremă (formula de medie)

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci există un punct c situat între a și b așa încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$



Numărul $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ se numește *valoarea medie a funcției f pe intervalul $[a, b]$* .

Teoremă

Fie $a \in (0, \infty)$ și $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă.

(i) Dacă f este funcție pară, atunci

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(ii) Dacă f este funcție impară, atunci

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Aplicații ale integralei definite în geometrie

i) *Aria domeniului mărginit cuprins între graficul unei funcții pozitive și axa Ox*

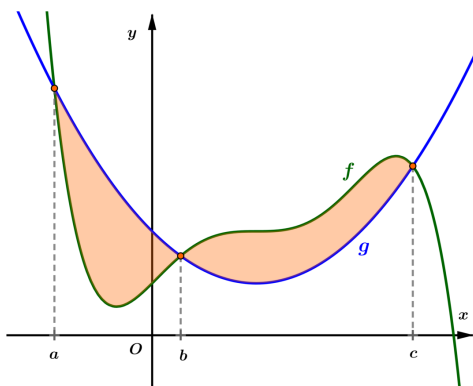
Fie funcția continuă $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este pozitivă pe intervalul $(a, b) \subset I$, atunci aria domeniului delimitat de axa Ox , dreptele $x = a, x = b$ și porțiunea de grafic cuprinsă între aceste drepte este

$$A_f = \int_a^b f(x) dx.$$

ii) *Aria domeniilor mărginite cuprinse între graficele a două funcții*

Două funcții continue $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ale căror grafice se intersectează în punctele de abscise $a < b < c$, determină un domeniu mărginit a cărui arie este

$$A_{f,g} = \int_a^c |g(x) - f(x)| dx.$$



De exemplu, în cazul figurii de mai sus, avem

$$A_{f,g} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - g(x)) dx.$$

Exemplu

Aria discului circular de rază r (centrat în origine):

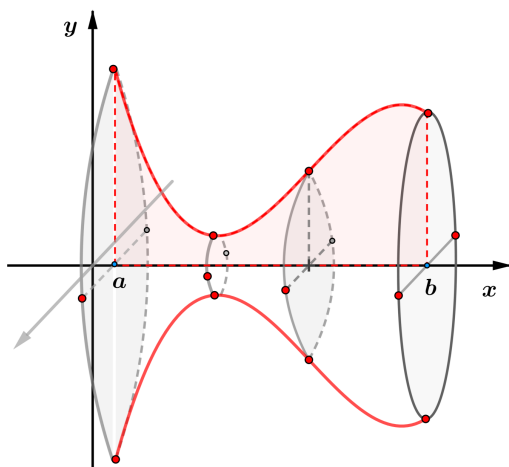
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} = \{(x, y) \mid -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Aria}(D) &= \int_{-r}^r \left| \sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2} \right) \right| dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left(2r^2 \arcsin \frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \right) \Big|_0^r = \pi r^2.
 \end{aligned}$$

iii) *Volumul corpurilor generate prin rotirea graficului funcției în jurul axei Ox*

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci corpul generat prin rotirea porțiunii de grafic cuprinsă între punctele $x = a$ și $x = b$ în jurul axei Ox are volumul

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze $\{3, 3\} + \{-3, 3\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- a) 0 b) 0,3 c) 0,6 d) 6,6 e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

- a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluțiilor ecuației $|x| + |x + 2| = 3$.

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\}$?

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

- a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) $\mathbb{R}$
d) $\emptyset$ e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

AL 6 Andrei și Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câștigă prima rundă, iar Cristian o câștigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârșitul celei de-a doua runde?

- a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 7 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent crește b ?

- a) 56,25% b) 40% c) 20% d) 0,025% e) 0,5% f) 60%

AL 8 Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \frac{1}{[x]},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[k, k + \frac{1}{k} \right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$
d) $\{1\}$ e) $[0, 1]$ f) $(0, 1)$

AL 9 Să se calculeze suma soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}.$$

- a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{20}{15}$ c) $\frac{14}{15}$ d) 1 e) $\frac{13}{15}$ f) $\frac{10}{15}$

AL 10 Să se calculeze media aritmetică a soluțiilor ecuației

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

- a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

AL 11 Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$[a]^2 - (2a - 1)[a] + 3a = 0.$$

- a) $[-1, 4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0, 4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0, 5]$
 d) $\{-3, -2, 0, 4, 5\}$ e) $(-1, 4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0, 4\}$

AL 12 Care dintre următoarele variante reprezintă negația propoziției

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- a) $\forall \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 b) $\nexists \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$
 d) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| \geq \eta$ și $|f(x) - l| \geq \varepsilon$
 e) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$
 f) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| < \eta$ și $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

AL 13 A demonstra prin contrapозиție propoziția $p \rightarrow q$ înseamnă a demonstra că este adevărată implicația $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$. Care dintre enunțurile de mai jos trebuie argumentat pentru a demonstra, folosind și contrapозиția, proprietatea

$$\forall m \in M, \quad \forall n \in N, \quad p(m, n) \wedge q(m, n) \rightarrow r(m, n) \quad ?$$

- a) $\forall m \in M, \quad \forall n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 b) $\exists m \in M, \quad \exists n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 c) $\exists m \in M, \quad \exists n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \wedge \bar{q}(m, n)$
 d) $\forall m \in M, \quad \exists n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 e) $\forall m \in M, \quad \forall n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \wedge \bar{q}(m, n)$
 f) $\exists m \in M, \quad \forall n \in N, \quad \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$

AL 14 Despre mulțimile A, B, C, D, E se știe că: toate elementele lui A sunt și în B , toate elementele lui B sunt și în C , există elemente ale lui C care nu sunt în B , toate elementele lui D sunt și în C , dar nu toate elementele din C sunt în D , nu există elemente comune mulțimilor A și D , există elemente care aparțin atât lui B , cât și lui D , unele elemente ale lui E sunt și elemente ale lui D , dar nu sunt elemente ale lui B . Care din următoarele afirmații rezultă din ipotezele anterioare?

- a) există elemente ale lui E care aparțin lui A
- b) mulțimea E este inclusă în mulțimea B
- c) toate elementele lui E aparțin și lui C
- d) există elemente ale lui B care sunt și în A și în E
- e) unele elemente ale lui E sunt elemente ale lui C
- f) mulțimile C și E nu au elemente comune

AL 15 Fie propozițiile p și q . Să se precizeze în câte cazuri din cele prezentate în următoarele tabele de adevăr se poate trage concluzia că propoziția q este adevărată:

$\frac{p}{1} \mid \frac{p \rightarrow q}{1}$	$\frac{p}{0} \mid \frac{p \vee q}{1}$	$\frac{p}{1} \mid \frac{\bar{q} \rightarrow \bar{p}}{1}$	$\frac{p}{0} \mid \frac{\bar{q} \rightarrow p}{1}$	$\frac{p}{1} \mid \frac{p \vee q}{1}$
--	---------------------------------------	--	--	---------------------------------------

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 16 Să se calculeze suma $\sum_{i=1}^{100} \left(\sum_{j=1}^i j \right)$.

- a) 171700
- b) $\frac{5050}{3}$
- c) 17
- d) 206040
- e) 2550
- f) $\frac{51}{2}$

AL 17 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuația

$$|x| + |y| < 10?$$

- a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

AL 18 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuația

$$x + y + z = 10 ?$$

- a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 19 Fie $M = \{\overline{abc} : a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, a \neq 0\}$ mulțimea numerelor naturale de trei cifre și $s = a + b + c$ suma cifrelor unui astfel de număr. Câte elemente ale mulțimii M verifică $s \leq 23$?

- a) 880 b) 890 c) 780 d) 860 e) 790 f) 881

AL 20 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuația

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0 ?$$

- a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 21 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

- a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 22 Câte numere pare de 4 cifre încep și se termină cu aceeași cifră?

- a) 324 b) 360 c) 400 d) 500 e) 900 f) 1000

AL 23 Se formează un număr alăturând, unul după altul, pătratele numerelor naturale diferite de zero, consecutive: 149162536... Să se determine în acest număr cifra așezată pe poziția 99.

- a) 2 b) 1 c) 4 d) 0 e) 7 f) 3

AL 24 Într-un șir $a_1, a_2, a_3, \dots$, fiecare termen, începând cu al doilea, se obține mărinđ cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

- a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 25 Se consideră șirul de numere raționale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Să se determine al câtelea termen al șirului este numărul $\frac{2016}{2015}$.

a) 8120450

b) 8118435

c) 2015

d) 2016

e) 8000111

f) 8000

AL 26 O particulă se mișcă în sistemul cartezian de coordonate după următoarea schemă: pornește din origine, după primul pas se mișcă o unitate la dreapta, la cel de-al doilea pas se mută 2 unități în sus, la al treilea pas 3 unități la stânga, la al patrulea pas 4 unități în jos, la al cincilea 5 unități la dreapta și așa mai departe. În ce punct se va afla particula după 2022 de pași?

a) (1011, 1012)

b) (1021, 1020)

c) (1020, 1020)

d) (1001, -1020)

e) (1004, 1005)

f) (1010, 1011)

AL 27 Fie $a_1, \dots, a_n, \dots$ termenii unei progresii aritmetice de rație r . Știind că $a_{21} = 20$ și $a_{101} = 60$, să se determine r și formula termenului a_{n+1} .

a) $r = \frac{1}{4}, a_{n+1} = n - 1$

b) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$

c) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$

d) $r = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{2}$

e) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{4}$

f) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{6}$

AL 28 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedentă. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

a) 10 cm

b) 11 cm

c) 12 cm

d) 13 cm

e) 14 cm

f) 15 cm

AL 33 Populația unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populația număra 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populația va atinge 24300 de bacterii?

- a) 10 min b) 15 min c) 20 min
d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 34 Fie $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, o progresie geometrică cu termeni nenuli și rație $q \neq 1$. Știind că $b_1 = 1$ și $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q și suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

- a) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ b) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$
c) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ d) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$
e) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ f) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$

AL 35 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație q și termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + \dots + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

- a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 36 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație $q \neq \pm 1$ și termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n+1}^2 \quad \text{și} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_{n+1}^2}.$$

- a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 37 Se consideră un pătrat de arie S_1 . Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2 . În același mod, construim succesiv un șir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

- a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 38 O particulă se mișcă în sistemul de coordonate xOy după următoarea regulă: la fiecare pas, din punctul de coordonate (x, y) particula se mută în punctul de coordonate $(x + y, -x)$. Dacă particula pleacă din punctul $(1, 1)$, unde se va afla după 2022 pași?

- a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 0)$
d) $(0, -1)$ e) $(-1, 1)$ f) $(2, -1)$

AL 39 Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- a) $\frac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\frac{1}{f(x)}$ f) $\frac{1}{f(-x)}$

AL 40 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \text{ și } g(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcția compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x(x^2 - x)$ c) $(3x - 1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 41 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{și } g(x) = x - 2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases} & \text{b) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} \\ \text{c) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 2x - 7, & x \geq -2 \end{cases} \\ \text{e) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} & \text{f) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

AL 42 Să se determine toate funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \quad \text{și} \quad g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

știind că $f \circ g = g \circ f$.

- a) $f(x) = x + 1, g(x) = x$ b) $f(x) = ax + 1, g(x) = x$
c) $f(x) = x + 1, g(x) = x + b$ d) $f(x) = ax + 1, g(x) = x + 1$
e) $f(x) = ax + 1, g(x) = x$ sau $f(x) = x + 1, g(x) = x + b$
f) $f(x) = x + 1, g(x) = x$ și $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$

AL 43 Să se determine funcția de gradul întâi, știind că graficul său taie axa Ox în punctul de abscisă $x = \sqrt{3}$ și trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

- a) $\frac{2}{\sqrt{3}}x + 2$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 2$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$
d) $\frac{3}{\sqrt{3}}x + 1$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 1$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}x$

AL 44 În câte puncte taie axa Ox graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} ?$$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 45 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m - 1)x, & x \in [2, 4) \\ x + 8, & x \in [4, \infty) \end{cases}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

- a) $(1, 2)$ b) $(1, 4)$ c) $(1, 4]$ d) $(1, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $(1, \infty)$

AL 46 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}$$

are exact trei soluții reale diferite.

- a) $\mathbb{R}$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $\emptyset$
d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

AL 47 Fie ecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o relație independentă de a între x_1 și x_2 .

- a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$
c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$
e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

AL 48 Să se calculeze expresia $E = x_1^4 - x_2^4$, știind că x_1 și x_2 , cu $x_1 > x_2$, sunt soluțiile ecuației $x^2 - ax - a^2 = 0$, unde $a \in (0, \infty)$.

a) $E = 5a^4\sqrt{3}$

b) $E = a^3$

c) $E = 3a^4\sqrt{5}$

d) $E = a^4\sqrt{5}$

e) $E = 4a^3$

f) $E = 3a^4$

AL 49 Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ și } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \frac{5a^2 + 1}{a^2} y + a = 0$

b) $y^2 - \frac{1}{a^2} y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$

d) $y^2 + \frac{5a^2 + 5a + 1}{a^2} y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$

f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 50 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real nenul a știind că inecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, -1]$

b) $[1, +\infty)$

c) $\{1\}$

d) $(0, 1]$

e) $\mathbb{R}^*$

f) $\emptyset$

AL 51 Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a + 2)x + 2a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului a , dacă $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$

b) $\{0\}$

c) $\{0, 1\}$

d) $\{1\}$

e) $\mathbb{R}$

f) $\emptyset$

AL 52 Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului a , dacă $A \cap B$ are exact două elemente.

- | | | |
|----------------------------------|----------------|---|
| a) $\{1\}$ | b) $\{0\}$ | c) $\{0, 1\}$ |
| d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ | e) $\emptyset$ | f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ |

AL 53 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ și trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc .

- a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 54 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P) . Să se determine mulțimea valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

- a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 55 Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ și este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| a) $2x^2 - 3x + 1$ | b) $-2x^2 + x + 1$ | c) $3x^2 - 4x + 1$ |
| d) $x^2 - 2x + 1$ | e) $x^2 + 2x + 1$ | f) $-4x^2 + 3x + 1$ |

AL 56 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a \text{ și } g(x) = x^2 + (b+1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a și b , știind că graficele funcțiilor f și g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox .

- a) $a = 0, b = -2$ b) $a = 1, b = -2$ c) nu există
d) $a = 0, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = -1, b = -2$

AL 57 Presiunea dintr-un recipient variază în timp după legea

$$p : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7,$$

unde t este exprimat în minute. După câte minute presiunea este minimă?

- a) 4,5 b) 6,0625 c) 0 d) 1 e) 9 f) 6,5

AL 58 Fie funcția $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m și valoarea maximă M a funcției f .

- a) $m = 0, M = 1$ b) $m = -4, M = 5$ c) $m = -4, M = 4$
d) $m \in \emptyset, M = 5$ e) $m = -4, M = 1$ f) $m = -4, M = +\infty$

AL 59 Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului a , știind că imaginea funcției f este un interval de lungime 1.

- a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1]$ c) $\{2\}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 60 Dacă numerele reale x și y satisfac relația $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

AL 61 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right|.$$

- a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 1 f) 2

AL 62 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluție.

- a) -2 b) 2 c) 4 d) 3 e) -1 f) -6

AL 63 Dacă $x + y = 2$ și $x^3 + y^3 = -4$, să se calculeze $x^4 + y^4$.

- a) -8 b) -4 c) -2 d) 2 e) 4 f) 8

AL 64 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real a astfel încât între soluțiile complexe z_1 și z_2 ale ecuației $z^2 + (2a - 1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relația

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

- a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$
d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

AL 65 Să se determine suma modulelor soluțiilor complexe ale ecuației

$$z^2 - (6 - i)z + 5 - i = 0.$$

- a) $2 + \sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1 + \sqrt{26}$

AL 66 Să se determine suma modulelor soluțiilor complexe ale ecuației

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

- a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 67 Să se calculeze $\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2013}}.$

- a) $\frac{1}{1+i}$ b) $\frac{i}{1+i}$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 68 Se consideră numerele complexe z și w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{și} \quad |z + w| = \sqrt{2013}.$$

Să se determine valoarea lui $|z - w|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 69 Se consideră numerele complexe z și w astfel încât

$$|z| = 4, \quad |w| = 7 \quad \text{și} \quad |z - w| = 9.$$

Să se determine valoarea lui $|z + w|$.

- a) 2 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10 f) 11

AL 70 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + z = 1 + i\}$ și $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulțimea $\{z^{4n}, z \in A\}$.

- a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
 d) $\emptyset$ e) $\{(i-1)^n\}$ f) $\{(i(i-1))^n\}$

AL 71 Fie z un număr complex ce verifică ecuația $z^2 - iz - 1 = 0$. Să se determine valoarea expresiei $\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right)^3$.

- a) i b) 1 c) -1 d) $-i$ e) 0 f) $2i$

AL 72 Știind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^9$.

- a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos \frac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 73 Numărul complex z satisface condițiile $|z - i| = |z - 1| = |z + 5|$. Să se determine $|z|$.

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 74 Se știe că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1 + 2i$, $-2 - 2i$ și $3 + i$. Care este cel de-al patrulea număr?

- a) $3 - 2i$ b) $-2 + 3i$ c) $2 - 3i$
 d) $-3 + 2i$ e) $2 - 2i$ f) $3 - 3i$

AL 75 Fie numărul complex z care verifică ecuația $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$.

- a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 76 Fie z un număr complex astfel încât $|z + 2| = |z - 6(1 + i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 77 Care este valoarea expresiei

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)^{24} ?$$

- a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^8 f) -2^8

AL 78 Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ și $z_2 = -2 + i$. Să se determine numerele complexe z astfel încât $|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|$.

- a) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{4}$
e) $-\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

AL 79 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + z + 1 = 0\}$. Știind că $z \in A$, să se calculeze $\frac{z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^3 - 4}{z^{2013} + 2}$.

- a) z b) z^2 c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 80 Să se determine suma soluțiilor ecuației

$$\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^3 + \left(\frac{z - i}{z + i} \right)^2 + \frac{z - i}{z + i} + 1 = 0 .$$

- a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 81 Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condițiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \quad \text{si} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Să se determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

- a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 82 Dacă numărul complex z satisface relația

$$|z - 2|^2 + |z - 3|^2 = |z - 5|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu:

- a) 4 b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 2 e) $3\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

AL 83 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puțin o soluție reală.

- a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
d) $-2, 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0, 1 \pm \sqrt{2}$

AL 84 Să se găsească mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{0, -1\}$ c) $\{0, 2\}$
d) $\{-1\}$ e) $\emptyset$ f) $\{0\}$

AL 85 Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

- | | | |
|-------------------|-------------------------|---------------------------------|
| a) $\{-1, 0, 1\}$ | b) $\{-1, 1, 2\}$ | c) $\{-1, 0, 2\}$ |
| d) $\{0, 1, 2\}$ | e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ | f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ |

AL 86 Fie mulțimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1, \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum_{x \in M} x^2$.

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|------|
| a) 1 | b) 4 | c) 9 | d) 13 | e) 20 | f) 2 |
|------|------|------|-------|-------|------|

AL 87 Să se determine numărul natural nenul n cu proprietatea

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{9}{10}.$$

- | | | | | | |
|-------|-------|--------|--------|------|--------|
| a) 99 | b) 24 | c) 999 | d) 624 | e) 9 | f) 399 |
|-------|-------|--------|--------|------|--------|

AL 88 Să se găsească mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + 2\sqrt{|2 + x - 3x^2|} > 1.$$

- | | |
|---|--|
| a) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$ | b) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{7}{13}, 1\right) \cup (1, \infty)$ |
| c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$ |
| e) $\left(-\frac{7}{13}, 0\right] \cup (1, \infty)$ | f) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ |

AL 89 Să se găsească mulțimea valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|-------------------|
| a) $[1, \infty)$ | b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ | c) $[-8, -4]$ |
| d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ | e) $(-\infty, -4]$ | f) $[-2, \infty)$ |

AL 90 Să se determine mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{25x^2 - 44x - 12} \geq 1 - 4x.$$

- | | |
|--|---|
| a) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$ | b) $(-\infty, -2]$ |
| c) $\left[\frac{6}{25}, \infty\right)$ | d) $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{6}{25}, \infty\right)$ |
| e) $\left[\frac{13}{3}, \infty\right)$ | f) $\left[\frac{6}{25}, \frac{13}{3}\right)$ |

AL 91 Să se găsească mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} + 2x \geq -1.$$

- | | | |
|------------------------------------|--|------------------|
| a) $\mathbb{R}$ | b) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ | c) $[-2, 1)$ |
| d) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ | e) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ | f) $[1, \infty)$ |

AL 92 Să se determine suma modulelor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+8} = 3.$$

- | | | | | | |
|-------|------|------|-------|------|------|
| a) 36 | b) 0 | c) 7 | d) 28 | e) 1 | f) 3 |
|-------|------|------|-------|------|------|

AL 93 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluții reale distincte.

- a) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$
d) $(1, 2]$ e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

AL 94 Se consideră ecuația

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - \frac{7}{26}} = \sqrt[3]{x - 1}.$$

Dacă E reprezintă mulțimea soluțiilor ecuației, să se calculeze $s = \sum_{x \in E} \frac{1}{x}$.

- a) $s = \frac{1}{26}$ b) $s = -26$ c) $s = \frac{10}{13}$ d) $s = 21$ e) $s = \frac{3}{13}$ f) $s = -21$

AL 95 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât $\frac{2002}{10-b}$ să aparțină intervalului $[1, 100]$.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$
d) $\{-4, -3, -2\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-3, -1\}$

AL 96 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ și $c = \frac{1-a-b}{2-2b}$. Să se determine 12^c .

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

AL 97 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ și $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Să se aducă la o formă mai simplă expresia

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \cdots + \frac{1}{\log_n a} .$$

- a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\frac{1}{\log_{n^n} a}$
 d) $\frac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \frac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

AL 98 Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ și notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

- a) $x + y$ b) xy c) $\frac{1}{x + y}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{x + y}{xy}$ f) $\frac{xy}{x + y}$

AL 99 Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 100 Fie numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, \dots, x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 \dots x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 \dots x_n) + \cdots + \log_{x_n}(x_1 x_2 \dots x_n) .$$

- a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 101 Fie a și b numere reale strict pozitive care satisfac relațiile

$$a^b = b^a \quad \text{și} \quad b = 9a.$$

Să se determine valoarea lui a .

- a) $1/9$ b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 102 Să se rezolve ecuația $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

- a) -1 b) 0 c) $\ln 6$
d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\frac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

AL 103 Să se rezolve ecuația $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

- a) $\left\{0, \frac{2 \ln 2}{\ln 2 + 2 \ln 3}\right\}$ b) $\left\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1, \frac{\ln 2}{2 \ln 2 + \ln 3}\right\}$
d) $\left\{1, \frac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0, \frac{\lg 2}{\lg 2 + 2 \lg 3}\right\}$ f) $\left\{0, \frac{\lg 3}{1 + 2 \lg 2}\right\}$

AL 104 Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x , știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-2\}$

AL 105 Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x , știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

- a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\emptyset$ f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

AL 106 Fie S mulțimea soluțiilor ecuației

$$0, 5^{x-1} + 9 = 0, 2^{x+1}.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x \in S} x^2.$$

- a) 5 b) 9 c) 25 d) 2 e) 6 f) 4

AL 107 Fie $\mathcal{S}$ mulțimea soluțiilor reale ale ecuației exponențiale

$$9^x + 20^x = 15^x + 16^x.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} 2^x.$$

- a) 5 b) $2 + \sqrt{2}$ c) 3 d) $1 + \sqrt{2}$ e) 6 f) 24

AL 108 Să se găsească produsul soluțiilor reale ale ecuației

$$x^{\log_2 x} = 16.$$

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 109 Numerele reale strict pozitive x și y verifică relațiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x + y).$$

Să se determine raportul $\frac{y}{x}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ c) $\log_2 3$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ f) $\log_3 2$

AL 110 Câte cifre are soluția ecuației $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

- a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10} + 1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 111 Să se determine numărul soluțiilor ecuației $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

- a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 112 Să se rezolve inecuația

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 2x + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3).$$

- a) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty)$ b) $x \in [-1, +\infty)$ c) $x \in \emptyset$
d) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ e) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, 0]$

AL 113 Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația

$$\log_x (x^2 - x + 2) > 2 \log_x (x + 1).$$

- a) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ c) $x \in (1, \infty)$
d) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ e) $x \in (0, 1)$ f) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

AL 114 În ce interval se află soluția strict pozitivă a ecuației

$$(x^2 + 9)^{\frac{1}{\log_x (x^2 + 9)}} = \sqrt[3]{-x^2 + 6x} ?$$

- a) $(2, 3]$ b) $(0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ c) $(1, 6)$
d) $(-1, 0)$ e) $[-1, 1]$ f) $(1, 2)$

AL 115 Să se determine mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3} + 4)^x - 3(\sqrt{3} + 1)^x + 2 < 0\}.$$

- a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}\right)$
d) $(0, +\infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}, +\infty\right)$

AL 116 Fie e baza logaritmului natural și x_1, x_2 soluțiile ecuației

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3 \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\frac{x_1}{x_2}$.

- a) $\frac{e+1}{e}$ b) e c) $\frac{e}{2}$ d) e^3 e) 2 f) 4

AL 117 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -1 \\ mx-3, & x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă și să se determine în acest caz funcția ei inversă.

a) $m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \frac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

b) $m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

c) $m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y \geq -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$

d) $m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \frac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

e) $m = -3, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

f) $m = -1, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} 2+y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

AL 118 Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care se poate calcula

$$C_{7x}^{x^2+10}.$$

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\{2, 3, 4, 5\}$ | b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| d) $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | e) $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 6\}$ | f) $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 6, 7\}$ |

AL 119 Să se calculeze suma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 100 \cdot 100!$.

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| a) $(101!)^2$ | b) $(100!)^2$ | c) $101!$ |
| d) $101! - 1$ | e) $200! + 1$ | f) $200! - 1$ |

AL 120 Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine mulțimea $\left\{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3}\right\}$.

- | | | |
|----------------|------------------------|------------------|
| a) $\{3, 4\}$ | b) $\{5, 6, 7\}$ | c) $\{2, 3, 4\}$ |
| d) $\emptyset$ | e) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ | f) $\{2, 4, 6\}$ |

AL 121 Să se calculeze suma $C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7$.

- | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a) 420 | b) 446 | c) 456 | d) 492 | e) 360 | f) 968 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

AL 122 Să se determine mulțimea valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq (C_{n+1}^3)^2.$$

- | | | |
|------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\{2, 3, 4\}$ | b) $\{1, 2, 3, 4\}$ | c) $\emptyset$ |
| d) $\{2\}$ | e) $[2, +\infty)$ | f) $\{2, 3, 4, 5\}$ |

AL 123 Fie

$$C = \{c_1 c_2 c_3 : c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$$

mulțimea stringurilor de trei cifre și

$$S_k = \{b_1 b_2 \cdots b_k : b_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}^*\}$$

mulțimea stringurilor binare formate din k biți. Să se determine câte funcții $h : S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_8 \rightarrow C$ se pot defini.

a) 1000^{510}

b) 900^{512}

c) 512^{1000}

d) 1000^{256}

e) 256^{1000}

f) 256^2

AL 124 Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Câte funcții impare $f : A \rightarrow A$ există?

a) 1250

b) 125

c) 625

d) 5

e) 20

f) 25

AL 125 Să se determine numărul funcțiilor pare

$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

a) 1250

b) 125

c) 625

d) 5

e) 1000

f) 25

AL 126 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin exact un număr impar?

a) 5

b) 16

c) 32

d) 64

e) 37

f) 160

AL 127 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, \dots, 10\}$ au produsul elementelor divizibil cu 10?

a) 512

b) 100

c) 1024

d) 45

e) 752

f) 256

AL 128 Câte numere de 10 cifre conțin 4 cifre de 3 și 6 cifre de 7?

a) 24

b) 120

c) 210

d) 240

e) 256

f) 720

AL 129 Câte din submulțimile de trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

- a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 130 Câte dintre submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au suma elementelor divizibilă cu 5?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 16

AL 131 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

- a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$
d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 132 Câte numere de 12 cifre au exact cinci cifre de 1, patru cifre de 2 și trei cifre de 3?

- a) $12!$ b) $11!$ c) $\frac{12!}{5!4!3!}$ d) $C_{12}^5 C_{12}^4 C_{12}^3$ e) $A_{12}^5 A_{12}^4 A_{12}^3$ f) 3^{12}

AL 133 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete și 7 băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete și 2 băieți pentru a participa la un concurs?

- a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 134 Alfabetul unui limbaj este format din literele A, B, E, L, R, T , aceasta fiind și ordinea lor alfabetică. Dicționarul acestui limbaj conține doar cuvinte de 6 litere, fiecare literă din alfabet fiind luată o singură dată în oricare cuvânt. Dacă așezarea în dicționar se face ținând cont de ordinea alfabetică a cuvintelor, atunci cuvântul aflat pe poziția 538 în acest dicționar este:

- a) $REBLTA$ b) $LERBAT$ c) $TBERLA$
d) $RABLET$ e) $TRABLE$ f) $ALBERT$

AL 135 Se consideră un alfabet format din simbolurile $\diamond$, $\heartsuit$, $*$ și $\sharp$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

- a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

AL 136 Un tren este format din 5 vagoane notate cu literele A, B, C, D, E. În câte moduri pot fi așezate aceste vagoane astfel încât vagonul A să se afle înaintea vagonului B?

- a) 60 b) 20 c) 40 d) 80 e) 30 f) 45

AL 137 Câte secvențe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

- a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

AL 138 O anagramă a unui cuvânt este orice cuvânt (cu sens sau fără sens) obținut prin permutarea literelor sale (inclusiv permutarea identică). Câte anagrame ale cuvântului SINUS pot fi construite?

- a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 90 f) 120

AL 139 Să se determine câte permutări $\sigma \in S_5$ satisfac simultan condițiile $\sigma(i) < \sigma(i+2)$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$ și $\sigma(j) < \sigma(j+3)$ pentru orice $j \in \{1, 2\}$.

- a) 1 b) 8 c) 7 d) 9 e) 24 f) 120

AL 140 Fie $M_1 = \{X, Y, Z\}$ și $M_2 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Un cod este format dintr-o literă din M_1 pe prima poziție și 3 cifre distincte din M_2 pe următoarele 3 poziții. Câte coduri ce conțin cel puțin una din cifrele 3, 5, 7 pot fi formate?

- a) 210 b) 510 c) 630 d) 720 e) 1530 f) 2160

AL 141 Aveți la dispoziție 2 piese albe, 3 piese negre și mai multe piese de culoare violetă, toate de aceeași formă pătrată. Le așezați în felul următor: o piesă pe primul rând, dedesubt 2 piese, sub acestea 3 și așa mai departe, în final 8 piese pe al optulea rând. În câte moduri puteți așeza aceste piese?

- a) $10 C_{36}^5$ b) $10 C_{28}^5$ c) A_{28}^5 d) A_{36}^5 e) $C_{28}^2 \cdot C_{28}^3$ f) $C_{36}^2 \cdot C_{36}^3$

AL 142 Un examen de matematică are două părți. Partea A conține 5 probleme, iar partea B conține 4 probleme. Fiecare student trebuie să rezolve în total 5 probleme, dintre care cel puțin două trebuie să fie din partea A și cel puțin două din partea B a examenului. Să se determine numărul de moduri diferite în care se pot alege cele 5 probleme pentru rezolvare.

- a) 100 b) 60 c) 40 d) 224 e) 2400 f) 120

AL 143 La o ședință cu părinții participă opt femei și șapte bărbați, printre care doamna X și domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei femei și patru bărbați, știind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

- a) 1540 b) 1960 c) 420
d) 282240 e) 5040 f) 277200

AL 144 Cinci prietene își fac una alteia cadouri astfel încât fiecare din ele oferă un cadou și primește un cadou (desigur, niciuna nu primește propriul cadou). În câte moduri diferite își pot oferi cadouri?

- a) 44 b) 10 c) 5 d) 120 e) 70 f) 20

AL 145 Un pătrat 3×3 este împărțit în 9 pătrățele 1×1 . Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrățele 1×1 . În câte moduri se poate face colorarea astfel ca o linie să rămână necolorată?

- a) 12 b) 15 c) 16 d) 18 e) 24 f) 32

AL 146 Un pătrat 3×3 este împărțit în 9 pătrățele 1×1 . Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrățele 1×1 astfel încât să existe cel puțin un pătrățel colorat pe fiecare linie și pe fiecare coloană. În câte moduri se poate face colorarea?

- a) 27 b) 63 c) 72 d) 81 e) 90 f) 126

AL 147 Câte numere naturale au suma cifrelor 12 și produsul cifrelor 12?

- a) 30 b) 42 c) 72 d) 168 e) 178 f) 240

AL 148 Câți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^{99}$?

- a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 149 Fie $x \in (0, \infty)$. Câți termeni din dezvoltarea $\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$ nu-l conțin pe x , dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 1024?

- a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 150 Fie binomul $\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x > 0$. Știind că termenul T_{13} este de forma c_1x , să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma c_2x^{-22} , unde c_1 și c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x .

- a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 151 Fie $A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \dots + 100C_{100}^{100}$. Atunci

- a) A este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$
d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $A = 100 \cdot 2^{99}$

AL 152 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 5x + 4x^3)^{10}$.

a) $40 \cdot C_{10}^2$

b) $200 \cdot C_{10}^2$

c) $5^4 \cdot C_{10}^4$

d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$

e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$

f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$

AL 153 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x + 2y + 3)^8$.

a) 5040

b) 560

c) 2016

d) 40320

e) 37

f) 65536

AL 154 Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5 + 2x)^{16}$ este cel mai mare.

a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$

b) $(0, 1)$

c) $(1, 3)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

e) $(-2, 2)$

f) $(-1, 1)$

AL 155 Care sunt probabilitățile p și q ca, alegând una dintre soluțiile ecuației $(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0$, aceasta să fie reală, respectiv întreagă ?

a) $p = \frac{1}{3}, q = 0$

b) $p = 1, q = \frac{1}{3}$

c) $p = q = \frac{1}{3}$

d) $p = 1, q = 0$

e) $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$

f) $p = q = \frac{1}{2}$

AL 156 Care sunt probabilitățile p și q ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n \in \mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101 ?

a) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{4}{101}$

b) $p = \frac{51}{101}, q = \frac{4}{101}$

c) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{5}{101}$

d) $p = \frac{51}{101}, q = \frac{5}{101}$

e) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{3}{101}$

f) $p = \frac{49}{100}, q = \frac{3}{101}$

AL 157 Din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ se aleg aleator șase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{10}$

AL 158 Amestecăm un pachet de 52 de cărți de joc și extragem simultan două cărți la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi ași de aceeași culoare?

- a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\frac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\frac{A_4^2}{52}$ e) $\frac{C_4^2}{52}$ f) $\frac{1}{51 \cdot 13}$

AL 159 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obținem suma punctelor 6?

- a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 160 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba și 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziționează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus și unul Sony?

- a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 161 Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se determine probabilitatea să se obțină aceeași față de exact 2 ori?

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 162 Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca produsul numerelor apărute să fie număr par?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{25}{36}$

AL 163 Din mulțimea numerelor de patru cifre se extrage aleator un număr. Calculați probabilitatea ca numărul să conțină două cifre de 5 și celelalte două de 7.

- a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{250}$ c) $\frac{1}{375}$ d) $\frac{1}{750}$ e) $\frac{1}{1500}$ f) $\frac{1}{3000}$

AL 164 Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 13. Se extrag aleator două bile. Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bilele extrase să fie un număr par?

- a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{5}{26}$ d) $\frac{7}{26}$ e) $\frac{42}{169}$ f) $\frac{84}{169}$

AL 165 Un program folosește aleator cifrele din mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$ pentru a scrie numere de patru cifre distincte. Se rulează programul. Care este probabilitatea ca numărul scris să fie număr par?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{7}{9}$

AL 166 Un tabel cu 2 linii și 6 coloane este completat aleator folosind toate numerele de la 1 la 12. Care e probabilitatea ca pe prima linie să fie doar numere impare?

- a) $\frac{1}{A_{12}^6}$ b) $\frac{1}{C_{12}^6}$ c) $\frac{1}{6!}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2^6}{12!}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 167 Un tabel cu mai multe linii și coloane completat cu 0 și 1 se numește *matrice binară*. Determinați probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii și 4 coloane, aceasta să aibă un singur element nenul.

- a) $\frac{1}{15!}$ b) $\frac{1}{16!}$ c) $\frac{2}{7!}$ d) $\frac{1}{2^{12}}$ e) $\frac{1}{2^8}$ f) $\frac{1}{2^4}$

AL 168 Un tabel cu mai multe linii și coloane completat cu 0 și 1 se numește *matrice binară*. Determinați probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii și 4 coloane, aceasta să aibă urma mai mare sau egală cu 2.

- a) $\frac{3!}{16!}$ b) $\frac{11}{16}$ c) $\frac{8!}{2^{16}}$ d) $\frac{15}{32}$ e) $\frac{7}{16!}$ f) $\frac{4!}{2^{16}}$

AL 169 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

- a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL 170 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

- a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = -2, y = -2$
d) $x = 2, y = -1$ e) $x = 1, y = -2$ f) $x = 2, y = 2$

AL 171 Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

și funcția

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = X^2 - 3X + I_2.$$

Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ și $f(B)$.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, 2B$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AL 172 Să se determine mulțimea numerelor $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

a) $\{10\}$

b) $\{2, 4\}$

c) $\emptyset$

d) $\{1\}$

e) $\{2\}$

f) $\{5\}$

AL 173 Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:

P_1 : Dacă A^2 se poate calcula, atunci A este o matrice pătratică;

P_2 : Dacă AB și BA se pot calcula, atunci A și B sunt matrice pătratice;

P_3 : Dacă AB și BA se pot calcula, atunci AB și BA sunt matrice pătratice;

P_4 : Dacă $AB = B$, atunci A este matricea identitate ?

a) P_1, P_2, P_3

b) P_2, P_3

c) P_1, P_2

d) P_1, P_3

e) P_2, P_3, P_4

f) nicio propoziție nu este corectă

AL 174 Fie A și B două matrice pătratice. Care dintre următoarele matrice sunt întotdeauna egale cu $(A - B)^2$?

$$M_1 = A^2 - B^2$$

$$M_2 = (B - A)^2$$

$$M_3 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$M_4 = A(A - B) - B(A - B)$$

$$M_5 = A^2 - AB - BA + B^2$$

a) M_2, M_4, M_5

b) M_1, M_2, M_3

c) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

d) M_2, M_3

e) M_2, M_3, M_5

f) M_1, M_2, M_3, M_4

AL 175 Să se determine numărul matricelor din mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & c \\ b & 0 & b \\ c & 1 & a-1 \end{pmatrix} \mid M^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & x \end{pmatrix}, a, b, c, x, y \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) 0

b) 5

c) 1

d) 3

e) 4

f) 2

AL 176 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz} , dacă matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relația

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) 4

b) x

c) 8

d) 2

e) e

f) 1

AL 177 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a + b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

a) -2

b) 8

c) 2

d) 3

e) 5

f) -1

AL 178 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze

$$\text{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A) \dots (I_2 + 2018A)],$$

unde $\text{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X .

- | | | |
|----------|----------------|----------------|
| a) 0 | b) 2018! | c) $1 + 2017!$ |
| d) 2019! | e) $1 + 2018!$ | f) $1 + 2019!$ |

AL 179 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB \neq O_2$ și $BA = O_2$. Să se determine mulțimea valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B .

- | | | |
|--|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $\{2k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ | b) $\mathbb{N}$ | c) $\mathbb{Z}$ |
| d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ | e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ | f) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ |

AL 180 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută la înmulțire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

- | | |
|---|---|
| a) $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = x_{21} = 0$ | b) $x_{11} = -x_{22}$, $x_{12} + x_{21} = 1$ |
| c) $x_{11} = x_{12} = 0$, $x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ | d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$ |
| e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ | f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$ |

AL 181 Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ | b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ | e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ |

AL 182 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C}, A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are mulțimea G ?

- | | | |
|--------------|--------------|----------|
| a) $(n-1)^2$ | b) n | c) $n-1$ |
| d) $n-2$ | e) $(n-2)^2$ | f) n^2 |

AL 183 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2018}.$$

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{2019^{2018} + 1}{2018} A$ | b) $\frac{2018^{2016} + 1}{2017} A$ | c) $\frac{2019^{2018} - 1}{2018} A$ |
| d) $2018A$ | e) $1009 \cdot 2019 A$ | f) $\frac{2018^{2016} - 1}{2017} A$ |

AL 184 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| a) 2 | b) 3 | c) 4 | d) 5 | e) 6 | f) 7 |
|------|------|------|------|------|------|

AL 185 Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n} X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

- | | | | | | |
|--------|----------|----------|---------|-----------|----------|
| a) X | b) I_2 | c) O_2 | d) $-X$ | e) $-I_2$ | f) X^2 |
|--------|----------|----------|---------|-----------|----------|

AL 186 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i > j \\ (-1)^{i+j} C_j^i & , \quad i < j . \end{cases}$$

Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcție de matricea identitate I_3 și de puterile matricei $B = A - I_3$.

- a) $A^n = nB^n + 2I_3$ b) $A^n = \left(\frac{n^2 - n}{2} + 1\right) B + nI_3$
c) $A^n = \frac{n^2 - n}{2} B^2 + nB + I_3$ d) $A^n = \frac{n^2 - n}{2} B + nI_3$
e) $A^n = nB^2 + \frac{n^2 - n}{2} B + I_3$ f) $A^n = \frac{n^2 - n - 1}{2} B^2 + nB + I_3$

AL 187 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei A^n , $n \geq 2$.

- a) $3^n + 2^{n+1}$ b) $4 \cdot 3^n - 2^n$ c) $4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} + 6^{n-1}$
d) $3^{n+1} + n \cdot 2^{n-1}$ e) $4 \cdot 3^n - 2^{n-1}$ f) $3^{n+1} - 2^n + 6^{n-1}$

AL 188 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \quad x \neq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1 - 4035^n \end{pmatrix}$$

AL 189 Să se determine numerele reale a și b pentru care soluția ecuației

$$X^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{a) } a = 0, b = 0$$

$$\text{b) } a = 2017, b = \frac{1}{2017}$$

$$\text{c) } a = \frac{1}{2017}, b = 2017$$

$$\text{d) } a = 0, b = \frac{1}{2017}$$

$$\text{e) } a = 2017, b = 0$$

$$\text{f) } a = \frac{1}{2017}, b = \frac{1}{2017}$$

AL 190 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad = bc$ și $a+d \neq 0$. Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$ b) $(a+b+c+d)^n + 2$
c) $\frac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$
e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

AL 191 Să se calculeze A^{36} , unde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

- a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

AL 192 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017} .

- a) $2^{2017}A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

AL 193 Se consideră mulțimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 6(2^n - 1) \\ 2 + 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$ b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} - 6 \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$
- c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n + 1) \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$
- e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n - 1) \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$

AL 194 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

și $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n , unde n este un număr natural nenul.

- a) 2^{n+1} b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\frac{5^{n+1}}{3}$
- d) $\frac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\frac{4^n + 5^n}{3} + 1$

AL 195 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Să se calculeze produsul

$$P = \prod_{X \in \mathcal{M}} X,$$

unde $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : X^2 = A\}$.

- a) $P = 5^4 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $P = 5^4 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $P = 5^2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
- d) $P = 5^4 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ e) $P = 5^2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ f) $P = 5^3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

AL 196 Să se determine suma elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) -2015 b) -2013 c) -2015 și 2023 d) 2018 e) -2017 și 2023 f) -2017 și -2013

AL 197 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{2020} \begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 198 Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \cdots + A^n(a)$ și să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{1}{n}B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

b) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

c) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a \text{ par}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \text{ par}$

e) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

f) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}, a \text{ par}$

AL 199 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$.

- | | |
|---|--------------------------------|
| a) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ | b) $a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3$ |
| c) $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$ | d) 0 |
| e) $-a_1 + b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3$ | f) $a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3$ |

AL 200 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1 + \log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\text{tr}(A))^{\det A}$, unde $\text{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A .

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--|
| a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$ | b) 1 | c) 0 |
| d) $\frac{1}{2} \log_2 3$ | e) $\frac{3}{2} \log_3 2 + 3$ | f) $\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_2 3 + 3$ |

AL 201 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \sum_{k=1}^n A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B .

- | | | |
|-----------------------------|----------|--------------------|
| a) $(2^{n+1} - 1)(3^n - 1)$ | b) 1 | c) 0 |
| d) $3(2^n - 1)(3^n - 1)$ | e) 6^n | f) $\frac{1}{6^n}$ |

AL 202 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) $a + b + c$ | b) $a^2 + b^2 + c^2$ |
| c) $ab + bc + ca$ | d) $(a+b)(a+c)(b+c)$ |
| e) $-a - b - c$ | f) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$ |

AL 203 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\det(A - I_2) = 2$. Să se calculeze

$$\det A + \det(A - 2I_2).$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL 204 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- a) 0 b) b c) c
d) a e) $a + b + c$ f) $(a + b + c)^3$

AL 205 Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

- a) 99800 $(a - b)(b - c)(c - a)$ b) 998001 $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$
c) $10^6 abc$ d) 9908 $(a + b + c)^3$
e) 0 f) 999 $\overline{abc}$

AL 206 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiția $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, 3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A .

- a) 2017 b) -2017 c) 1 d) -1 e) 0 f) 1009

AL 207 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ și

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - a - 1 & ac - a & a^2 - b^2 - c \\ b^2 + ab - a - 1 & a^2 - c^2 - b & ab - a \\ b^2c + bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

c) 1

d) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 208 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c^3} & -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

a) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$

b) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$

c) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$

d) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$

e) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$

f) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$

AL 209 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \leq i \leq n-1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

- a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 210 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluțiile ecuației $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $|x_1| + |x_2| + |x_3|$.

- a) 0
- b) 1
- c) 3
- d) 7
- e) -3
- f) 4

AL 211 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relațiile $AA^t = A^tA = I_3$ și are determinantul egal cu 1.

- a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 212 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A . Câte elemente are mulțimea $\{I_2, A, A^2, \dots, A^{2018}\}$?

- a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 213 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB \neq BA$ și $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \operatorname{tr}(A + B),$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X .

- a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 214 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care soluția ecuației

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

este o matrice nesingulară.

AL 218 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \text{ sau } i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \text{ și } i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 219 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$ b) $\left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup (1, +\infty)$ c) $\left(\frac{2}{3}, 1 \right)$
d) $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$ e) $\left(-\infty, \frac{1}{3} \right] \cup [2, +\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3}, 1 \right]$

AL 220 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine abc .

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 221 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ și

$$A^4 - (a+d)^2 A^2 + (ad-bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existența inversei lui A și în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1} .

a) $\frac{a+d}{ad-bc} I_2$

b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{a+d} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) A

f) $\frac{1}{bc-ad} \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 222 Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ două matrice de forma

$$A = [a \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4], \quad \text{respectiv} \quad B = [b \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4],$$

unde a, b, c_2, c_3, c_4 sunt coloanele acestor matrice. Dacă

$$\det(A) = 1 \quad \text{și} \quad \det(B) = 4,$$

cât este determinantul matricei $C = [c_2 \mid a+b \mid c_3 \mid c_4]$?

a) 5

b) 0

c) 4

d) -5

e) 1

f) Nu se poate determina

AL 223 Câte cvadruplete ordonate (a, b, c, d) de numere naturale satisfac

simultan relațiile: $a + b + c + d = 12$ și
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

a) 147

b) 127

c) 118

d) 128

e) 64

f) 96

AL 224 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

f) 6

AL 225 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 226 Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ are rangul minim.

- a) $\pm \frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 227 Pentru câte valori ale parametrului real m matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 228 Să se determine valorile parametrilor reali a și b pentru care matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

au același rang.

- a) $a = 1, b = 0$ b) $a = -1, b = 0$ c) $a = 0, b = 0$
 d) $a = 0, b = 1$ e) $a = 0, b = -1$ f) $a = 1, b = 1$

AL 229 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $\{-1\}$

d) $\{\pm 1, 2\}$

e) $\{1\}$

f) $\{1, \pm 2\}$

AL 230 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5y + mz + 8t = 7 \\ x - y + 5z - 3t = n \\ 3x - my + z + pt = 7, \end{cases}$$

unde $m, n, p \in \mathbb{R}$ și $n \neq 0$. Să se calculeze suma $m + p$ astfel încât sistemul să fie compatibil, iar rangul matricei sale extinse să fie egal cu 2.

a) 1

b) 34

c) 17

d) -10

e) -20

f) -7

AL 231 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m - 1)z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui m astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

b) $\{-2, 2\}$

c) $\{0\}$

d) $\{-2\}$

e) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$

f) $\{1\}$

AL 232 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz + 4t = p \\ 2x + 3y + z + 6t = 1 \\ -x - 2y + 3z + nt = 2, \quad m, n, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil și rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

- a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 233 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5 \end{cases}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

- a) $\left\{-\frac{1}{10}\right\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$
 d) $\left\{\frac{1}{10}\right\}$ e) $\left\{-\frac{1}{20}\right\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{20}\right\}$

AL 234 Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul

$$\begin{cases} -2x + my - 6z = m - 1 \\ mx - 2y + 7z = 1 - m \\ x + y + z = m^2 - 1 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

- a) $\{-2\}$ b) $\emptyset$ c) $\{3\}$
 d) $\{1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-1\}$

AL 235 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

- a) $(-24, 14, 19)$ b) $(-2, -3, 3)$ c) $(21, 10, -14)$
d) $(-5, -3, 6)$ e) $(-14, -21, 24)$ f) $(3, -2, -3)$

AL 236 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Care dintre următoarele relații este verificată de soluțiile sistemului?

- a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$ b) $x + y + z = 3$ c) $x^2 + y - z^2 = -1$
d) $x + y^2 - z^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ f) $x^2 + y + z^2 = 4z$.

AL 237 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Care dintre relațiile de mai jos este adevărată pentru orice soluție $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ a ecuației matriceale

$$(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

- a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 238 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1 \end{cases}.$$

Să se determine mulțimea valorilor lui a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}_+^*$ e) $\mathbb{Q}^*$ f) $\{-1\}$

AL 239 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1 \end{cases},$$

unde a este un parametru real. Să se determine mulțimea valorilor lui a pentru care soluția sistemului verifică relația $3x + 3y - z = 0$.

- a) $\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 240 Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- a) $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$
 c) $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, -1)$ d) $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$
 e) $(0, 0, 1)$, $\left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, 1)$

AL 241 Fie (x_0, y_0, z_0) o soluție nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea raportului $\frac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}$.

- a) $\frac{23}{5}$ b) 1 c) $\frac{7}{5}$ d) 2 e) -1 f) $-\frac{7}{5}$

AL 242 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0. \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluție.

- a) $a = b = c$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ c) $a \neq b, b \neq c, c \neq a$
d) $\nexists a, b, c \in \mathbb{R}$ e) $a = b \neq c$ f) $a \neq b = c$

AL 243 Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită și soluții diferite de soluția banală.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
d) $\{\pm 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\{-1\}$

AL 244 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a + 3) = 0 \end{cases},$$

este compatibil nedeterminat. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este o soluție a sistemului.

- a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 245 Se consideră sistemul liniar

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases},$$

unde a, b, c sunt parametri reali. Care dintre următoarele propoziții matematice este adevărată?

- a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat
 b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil
 c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat
 d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat
 e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil
 f) Toate afirmațiile sunt false

AL 246 Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă (x_n, y_n, z_n) este soluția sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{n+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^n - \frac{1}{2^n} \\ 2x + y + z = 1 + 2^n + \frac{1}{2^n} \end{cases},$$

să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n z_n$.

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 247 Fie S mulțimea soluțiilor reale ale sistemului

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 2 \end{cases}.$$

Să se determine $\min_{(x,y,z) \in S} (x^2 + y^2 + z^2)$.

- a) 1 b) 1,4 c) 1,6 d) 2 e) 2,4 f) 3

AL 248 Pe mulțimea $(0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$.

Să se calculeze $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{50}$.

- a) $\frac{1}{1225}$ b) $\frac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\frac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\frac{1}{1300}$

AL 249 Pe mulțimea $(-1, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Să se calculeze

$$\underbrace{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \dots * \frac{1}{2}}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

- a) $\frac{4 \cdot 3^n - 32}{3^n - 4}$ b) $\frac{2^n}{2^n + 1}$ c) $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1}$
d) $\frac{7 \cdot 2^{n-2} - 1}{13 \cdot 2^{n-3} + 1}$ e) $\frac{3^n - 1}{3^n + 1}$ f) $\frac{4^{n+1} - 1}{4^{n+1} + 1}$

AL 250 Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție

$$x \circ y = (x - a)^2 (y - a) + a, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației $x \circ x = x$.

- a) $\{a, a - 1\}$ b) $\{a, a + 1\}$ c) $\{a - 1, a, a + 1\}$
 d) $\{-a, 1 - a\}$ e) $\{-a, -a - 1\}$ f) $\{-a, 1 - a, -a - 1\}$

AL 251 Pe mulțimea numerelor reale se definește operația algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v) este soluția sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ (x \circ 2) + (y \circ 3) = 2\sqrt{13} \end{cases}$$

cu proprietatea că $u, v > 0$, să se determine $u + v$.

- a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$

AL 252 Se consideră $\mathbb{R}$ cu legea de compoziție $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operația de înmulțire a matricelor "·". Să se determine mulțimea valorilor lui a pentru care a funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 253 Să se determine $k \in \mathbb{R}$, știind că mulțimea $[1, 3]$ este parte stabilă în raport cu operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + k$.

- a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = 2$ d) $k = 3$ e) $k = 6$ f) $k = -2$

AL 254 Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Să se determine mulțimea valorilor pe care le poate lua $\det A$, dacă A și A^{-1} aparțin mulțimii $\mathcal{M}$.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 255 Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ și mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Care este condiția ca $(\mathcal{M}, \cdot)$ să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$?

- a) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ b) $\alpha = \beta, \gamma = 0$ c) $\beta = 2\alpha, \gamma = 1$
d) $\alpha = 2\beta, \gamma = -1$ e) $\alpha = 2\beta, \gamma = 1$ f) $\alpha = -\beta, \gamma = 1$

AL 256 Pe mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziție $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă și comutativă?

- a) $a \in \{-3, 2\}, b = a$ b) $a \in \{-2, 3\}, b = a$ c) $a \in \{-1, 2\}, b = a$
d) $a = -2, b = 3$ e) $a = -1, b = 2$ f) $a = -3, b = 2$

AL 257 Să se determine o relație între parametrii reali a și b astfel încât legea de compoziție $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

- a) $a^2 = a + b$ b) $a = a^2 + b$ c) $b^2 + a = a^2$
d) $a + a^2 = b$ e) $2a = b + a^2$ f) $2b + a = a^2$

AL 258 Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$x * x = -2.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1, -1\}$ d) $\{2, -2\}$ e) $\{1, -2\}$ f) $\{-2\}$

AL 259 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi și să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

- a) $e = 1 + i, -1$ b) $e = 1 + i, i$ c) $e = 1, 1 - 2i$
 d) $e = 1 - i, i$ e) $e = -i, 2 - i$ f) $e = 2 + i, 1 - i$

AL 260 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy + 2i(x + y) - 4 - 2i.$$

Să se determine elementul neutru e al acestei legi și să se calculeze

$$w = (1 - i) * (1 - i)^2 * (1 - i)^3 * (1 - i)^4 * (1 - i)^5.$$

- a) $e = 1 - 2i$ și $w = 1 - i$ b) $e = 2i$ și $w = -2i$
 c) $e = 2i$ și $w = 1 - i$ d) $e = 2 - i$ și $w = -i$
 e) $e = 1 - 2i$ și $w = -2i$ f) $e = -i$ și $w = 2 - i$

AL 261 Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

- a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 262 Pe mulțimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z} + 1$ se definește operația

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulțimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(2\mathbb{Z} + 1, *)$.

- a) $\{-3, 1\}$ b) $\{1\}$ c) $2\mathbb{Z} + 1$
d) $\{-5, -3, 1, 3\}$ e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

AL 263 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{M}, \cdot)$, unde " $\cdot$ " reprezintă operația de înmulțire a matricelor.

- a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 264 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2).$$

Să se determine elementele simetrizabile în raport cu această lege.

- a) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}$ b) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$
c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C}^*$
e) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ f) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) < 0\}$

AL 265 Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

și mulțimea $\mathcal{M} = \{xA + B \mid x \in \mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulțimea elementelor inversabile din $\mathcal{M}$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

- a) $\emptyset$ b) $\mathcal{M} \setminus \left\{ \frac{1}{2}A + B \right\}$ c) $\mathcal{M} \setminus \{I_2\}$
d) $\mathcal{M} \setminus \{-A + B\}$ e) $\mathcal{M}$ f) $\mathcal{M} \setminus \{2A + B\}$

AL 266 Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ și $a \in [0, \infty)$. Pe mulțimea $M = (a, +\infty) \setminus \{a+1\}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = (x - a)^{\ln \sqrt[k]{y-a}} + a.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$ în raport cu legea $*$.

- a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)} + a}$ b) $\frac{e^{k^2}}{x-a} + a$ c) $\frac{e^{k^2}}{x-a}$
d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$ e) $e^{k^2} - x - 2a$ f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$

AL 267 Pe mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ se introduce legea de compoziție

$$x * y = a \sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, n impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziție.

- a) $\frac{b^{2^n}}{x}$ b) $a \sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}$ c) $a \sqrt[n]{2 \log_a^n b - \log_a^n x}$
d) $\frac{b^2}{x}$ e) $a \sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}$ f) $\frac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

AL 268 Pe mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ se consideră legea de compoziție

$$x * y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}.$$

Știind că elementul 2^p este simetricul elementului 2^q în raport cu legea dată (unde $p, q \in \mathbb{R}$), să se calculeze $p^3 + q^3$.

- a) 16 b) 2 c) 4 d) 32 e) 8 f) 24

AL 269 Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile față de legea $*$ din mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- a) $(b, 1), b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0), b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1), b \in \mathbb{Z}$
d) $(\pm 1, b), b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b), b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b), b \in \mathbb{Z}$

AL 270 Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $*$ prin relația

$$x * y = xy + 2(x + y + 1), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{Z}.$$

Care dintre următoarele propoziții este adevărată?

- a) Legea $*$ nu este asociativă.
b) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ și 2 este elementul neutru al monoidului.
c) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ și -2 este element simetrizabil.
d) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ și 3 este elementul neutru al monoidului.
e) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ și -3 este element simetrizabil.
f) $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

AL 271 Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră legea de compoziție asociativă și comutativă $*$ definită prin

$$A * B = AB - 2A - 2B + 6I_2.$$

Să se studieze simetrizabilitatea elementelor lui $\mathcal{M}$ în raport cu legea $*$. Dacă A' desemnează simetricul elementului A , să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată:

- a) În mulțimea $\mathcal{M}$ nu există element neutru în raport cu $*$.
 b) I_2 este element neutru în raport cu $*$ și $A' = A^{-1}$ ($\forall$) $A \in \mathcal{M}$.
 c) $3I_2$ este element neutru și toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile.
 d) $3I_2$ este element neutru și ($\forall$) $A \in \mathcal{M}$ cu $x \neq 2$ este simetrizabil.
 e) I_2 este element neutru și $A' = (A - 2I_2)^{-1} + 2I_2$.
 f) $-I_2$ este element neutru și toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile.

AL 272 Pe mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

- a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 273 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

Să se determine valoarea parametrului a pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ și $(G, \cdot)$, unde relația " $*$ " este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar " $\cdot$ " este înmulțirea matricelor.

- a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25

AL 274 Fie $\mathbb{R}^*$ dotată cu legea de compoziție definită prin $a * b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulțirea matricelor " $\cdot$ ". Să se determine mulțimea valorilor lui k pentru care funcția

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow M, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ și $(M, \cdot)$.

- a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 275 Fie $G = (1, +\infty)$ care are o structură de grup față de operația ” $*$ ” definită prin

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : (0, +\infty) \rightarrow G, \quad f(x) = \sqrt{ax + b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

- a) $a = 0, b = 2$ b) $a = 1, b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0, b = 1$
d) $a = 0, b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = b = 1$

AL 276 Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ și } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ și $(\mathbb{Z}, \top)$.

- a) $(1, -10), (-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$
d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0), (-1, -10)$ f) $(1, 0)$

AL 277 Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5$, $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $a \neq \widehat{0}$. Să se găsească toate funcțiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f_{a,b}^4 = f_{\widehat{2},\widehat{0}}^{2018} \circ f_{\widehat{2},\widehat{2}}^{2020} \circ f_{\widehat{2},\widehat{4}}^{2022},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}.$

- a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}; f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$

AL 278 Fie legile de compoziție

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{și} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $e_{\perp} = \widehat{10}, e_{\top} = \widehat{3}$ | b) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{3}$ | c) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{6}$ |
| d) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{4}$ | e) $e_{\perp} = \widehat{4}, e_{\top} = \widehat{3}$ | f) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{11}$ |

AL 279 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulțimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

- | | | |
|-----------------------|---|----------------|
| a) $\mathbb{Z}[i]$ | b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ | c) $\{1, i\}$ |
| d) $\{\pm 1, \pm i\}$ | e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ | f) $\emptyset$ |

AL 280 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{și} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|---------------------|
| a) $a = b = c = 17$ | b) $a = b = 1, c = 56$ | c) $a = b = c = 7$ |
| d) $a = b = 1, c = 7$ | e) $a = b = c = 1$ | f) $a = b = c = -1$ |

AL 281 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x * y = x + y - 2 \quad \text{și} \quad x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

- | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| a) $a = 1, b = 0$ | b) $a = 1, b = 1$ | c) $a = 1, b = 2$ |
| d) $a = 2, b = 1$ | e) $a = 1, b = -2$ | f) $a = -1, b = 2$ |

AL 282 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{11}$ cu soluția (x_0, y_0) . Dacă y'_0 este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my'_0 = x_0$.

- a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

AL 283 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluția $(\widehat{3}, \widehat{2})$ și să se specifice numărul total al soluțiilor.

- a) $a = \widehat{2}$, 5 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții b) $a = \widehat{4}$, 7 soluții; $a = \widehat{6}$, 3 soluții
c) $a = \widehat{1}$, 3 soluții; $a = \widehat{5}$, 8 soluții d) $a = \widehat{3}$, 8 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții
e) $a = \widehat{1}$, 5 soluții; $a = \widehat{5}$, 3 soluții f) $a = \widehat{3}$, 6 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții

AL 284 În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuația

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 285 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluțiile ecuației $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

- a) $A(\widehat{7})$ b) $A(\widehat{3})$
 c) $A(\widehat{2}), A(\widehat{5}), A(\widehat{8})$ d) $A(\widehat{1}), A(\widehat{4})$
 e) $A(\widehat{0})$ f) nu are soluții

AL 286 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine A^{-1} .

- a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

AL 287 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$

pentru care A este inversabilă și să se determine A^{-1} .

- a) $m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ b) $m = \widehat{1}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$
 c) $m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ d) $m = \widehat{2}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
 e) $m = \widehat{1}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ f) $m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

AL 288 Fie polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - X - 5$ și $g = X^2 + 1$. Să se determine câtul c și restul r ale împărțirii lui f la g .

a) $c = X + 2, r = 0$

b) $c = X^2 + 1, r = X + 2$

c) $c = X + 2, r = -2X - 7$

d) $c = -2X - 7, r = X + 2$

e) $c = X + 1, r = -2$

f) $c = X - 1, r = 0$

AL 289 Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b, a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că -1 este rădăcină a polinomului f și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărțirii lui f la $X^2 - X - 2$.

a) $a = 1, b = 4, X + 1$

b) $a = -1, b = 4, 2X + 2$

c) $a = 1, b = 4, 2X + 2$

d) $a = -1, b = 2, 2X + 1$

e) $a = 1, b = 2, X + 2$

f) $a = -1, b = 4, X - 1$

AL 290 Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ și restul împărțirii lui f la $X + 1$ să fie 3.

a) $a = 3, b = 2, c = 5$

b) $a, b, c \in \emptyset$

c) $a = -2, b = 3, c = 5$

d) $a = 2, b = 3, c = 5$

e) $a = 3, b = 2, c = -5$

f) $b = 3, c = 2a + 1, a \in \mathbb{R}$

AL 291 Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

a) $a, b, c \in \emptyset$

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $a = b = c = 0$

d) $a = c = 1, b = -1$

e) $a = c = -1, b = 1$

f) $a = 1, b = -5, c = 4$

AL 292 Să se determine polinomul cu coeficienți raționali de grad minim care împărțit la $X^2 + 2X - 3$ dă restul $3X + 11$ și împărțit la $X^2 - 4X + 5$ dă restul $7X - 3$.

- | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| a) $-X^3 - 4X + 12$ | b) $X^3 + 2X - 17$ | c) $-X^3 + 4X + 11$ |
| d) $X^3 - 4X + 17$ | e) $X^3 + 3X + 15$ | f) $-X^3 + 17X - 5$ |

AL 293 Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

- | | | |
|---------------|----------------------|---------------|
| a) X | b) 0 | c) $X - 2000$ |
| d) $X + 2014$ | e) $2016 \cdot 2014$ | f) $X - 2016$ |

AL 294 Să se determine parametrii reali a, b, c pentru care polinomul $f = (X - 1)^7 + a(X - 1)^4 + bX + c$ se divide cu $(X + 1)^3$.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $a = 28, b = 448, c = 128$ | b) $a = 56, b = 448, c = 576$ |
| c) $a = 56, b = 320, c = 81$ | d) $a = 28, b = 448, c = 192$ |
| e) $a = 84, b = 320, c = 81$ | f) $a = 28, b = 320, c = 128$ |

AL 295 Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul $X^9 + mX^2 + n$ să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

- | | | |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| a) $m = 0, n = 0$ | b) $m = 0, n = -1$ | c) $m = -1, n = 0$ |
| d) $m = -1, n = -1$ | e) $m = 1, n = 0$ | f) $m = 0, n = 1$ |

AL 296 Să se determine restul împărțirii polinomului X^n la polinomul $X^2 + 2X - 3$.

a) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$

b) $\frac{1}{4}[(1 + (-3)^n)X + 3 + (-3)^n]$

c) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 - (-3)^n}{4}$

d) $\frac{2 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$

e) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + 3^n}{4}$

f) $\frac{1}{4}[(1 + 3^n)X + 3 + (-3)^n]$

AL 297 Să se determine restul împărțirii polinomului $(X^3 + X + 1)^{19}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) -1 b) X c) $X + 1$ d) 0 e) $X - 1$ f) 1

AL 298 Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$ și să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0,$$

știind că două dintre rădăcinile sale sunt opuse.

a) $a = -3, \{1, 2, \pm\sqrt{2}i\}$

b) $a = -1, \{\pm 1, \pm 2\}$

c) $a = 2, \{1, 2, \pm 2i\}$

d) $a = -2, \{1 \pm i, \pm 1\}$

e) $a = -1, \{\pm 2, \pm i\}$

f) $a = -3, \{\pm 1, \pm\sqrt{2}i\}$

AL 299 Fie polinomul $f = X^4 + a^2X^3 - 7X^2 + aX + 6$. Să se determine mulțimea valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

a) $\emptyset$

b) $\mathbb{R}$

c) $\left\{-1, \frac{8}{9}\right\}$

d) $\left\{-1, 0, \frac{8}{9}\right\}$

e) $\{-1, 0\}$

f) $\{-1\}$

AL 300 Fie polinomul $f = X^3 + X^2 - 2X - 2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

- a) $(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ b) $(X-1)(X^2+2)$
 c) $(X+1)(X^2-2)$ d) $(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$
 e) $(X+1)(X-2)(X+2)$ f) $(X+1)(X^2+2)$

AL 301 Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

- a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$
 c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})^2(X+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$
 e) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$ f) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

AL 302 Fie polinomul $f = (1-2X)^{2017} + (3X-2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .

- a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 303 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluția $1+i$ și să se găsească celelalte soluții.

- a) $a = -6, b = 12, \{1-i, -1, -6\}$ b) $a = -3, b = 6, \{1-i, 1+i, -1\}$
 c) $a = 12, b = -6, \{1-i, 1, 12\}$ d) $a = 6, b = -12, \{1+i, -1, -3\}$
 e) $a = -6, b = 12, \{1-i, -1, 6\}$ f) $a = 4, b = 6, \{1+i, 1, 6\}$

AL 304 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Știind că

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

- a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

AL 305 Fie polinomul $P = X^3 + mX^2 + nX - a^3$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Știind că $P(a-x) + P(a+x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

- a) 0 b) a c) $(2017 - a)^3$ d) 2017^3 e) a^3 f) 2017

AL 306 Polinoamele cu coeficienți reali $aX^2 + bX + c$, $aX^3 + bX^2 + bX + a$ și $aX^3 + cX^2 + cX + a$, $a \neq 0$, admit o rădăcină comună dacă și numai dacă:

- a) $a, b, c \in \mathbb{R}$ b) $a + b + c = 0$, $b \neq c$
c) $a - b + c = 0$, $b \neq c$ d) $a + b - c = 0$
e) $-a + b + c = 0$ f) $-a + b + c = 0$, $a \neq b$

AL 307 Fie polinoamele $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ și $Q = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $P(Q(x)) = 0$.

- a) 0 b) $\frac{a}{b}$ c) $\frac{6 - 3b}{a}$ d) $\frac{b}{a}$ e) $\frac{1 - b}{a}$ f) 1

AL 308 Fie polinoamele P și Q cu proprietatea $P(x) = Q(x) + Q(1 - x)$. Știind că P are coeficienți naturali și $P(0) = 0$, să se determine $P(P(3))$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 309 Fie polinoamele P și $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Știind că P are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 și rădăcinile -1 și 0 , să se determine $P(3)$.

- a) 60 b) 0 c) 24 d) -24 e) -60 f) 1

AL 310 Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărțirii lui P la $X - 7$ este 3. Să se determine restul împărțirii lui P la $X^2 - 7X$.

- a) 3 b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{1}{7}X + 2$ d) $X - 4$ e) 0 f) $-X + 10$

AL 311 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n , știind că restul împărțirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3 - \sqrt{3}$.

- a) $m = 0, n = 1$ b) $m = 1, n = 1$ c) $m = 1, n = 2$
d) $m = 2, n = 1$ e) $m = 2, n = 2$ f) $m = 1, n = 0$

AL 312 Știind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 , să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

- a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 313 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} X^{k-1}, \quad i = \overline{1, 3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- a) -1 b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$
c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) 0
e) 1 f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

AL 314 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde $x_i, i = \overline{1, 3}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

- a) -1 b) 0 c) 1 d) 11 e) -11 f) 2

AL 315 Fie ecuația $x^3 - ax + a^2 = 0, a \in \mathbb{R}$, cu soluțiile x_1, x_2, x_3 . Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) $-a^2$ c) a^2 d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

AL 316 Știind că x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) 3 c) -17 d) $\frac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 317 Se consideră ecuația $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3 și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2 .

- a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 318 Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 - b_1 i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 - b_2 i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 - b_3 i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluțiile ecuației $x^3 + \alpha_k = 0$, $k = \overline{1, 3}$.

- a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1 b_2 c_3$
 c) 0 d) 1
 e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)(b_3 - c_3)$

AL 319 Fie $f = X + a$ și $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $-(a + b + c)^2$ e) 1 f) abc

AL 320 Suma soluțiilor comune ale ecuațiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

- a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1 + \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 321 Să se determine parametrii reali a, b și c astfel încât polinomul

$$f = X^4 + aX^3 + bX + c$$

să fie divizibil cu $g = (X - 1)^2 (X + 2)$.

- a) $a = 1, b = -1, c = -2$ b) $a = 3, b = -3, c = -2$
c) $a = -2, b = 2, c = -1$ d) $a = 3, b = 1, c = 2$
e) $a = 2, b = -3, c = 2$ f) f nu este divizibil prin g , $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$

AL 322 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condițiile:

- (i) $P + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$;
(ii) $P - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

Să se calculeze $P(0)$.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 323 Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condițiile:

- (i) $P + X$ este divizibil cu $(X - \sqrt{2})^2$;
(ii) $P - X$ este divizibil cu X^3 .

Să se calculeze $P(2)$.

- a) 2 b) 1 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1

AL 324 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție injectivă. Să se determine suma coeficienților polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relația

$$-2x + 4 + 5f(x + 2) = 4f(3x - 2) + f(2x - 7P(x - 1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 325 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuației $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, atunci ele verifică relația:

- a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$ b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$
c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$ d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$
e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$ f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$

AL 326 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine mulțimea valorilor parametrului m pentru care are loc relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

- a) $\emptyset$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

AL 327 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4 . Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} + \frac{1}{2-x_4}.$$

- a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 328 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2 .

- a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$
 c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$
 e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 329 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că soluțiile ecuației

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu rația număr natural.

- a) $a = 5, b = 67, c = 100$ b) $a = -15, b = 70, c = -120$
 c) $a = 15, b = 70, c = 120$ d) $a = -5, b = 67, c = 100$
 e) $a = 15, b = -70, c = 120$ f) $a = 5, b = -67, c = -100$

AL 330 Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$ au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condițiile $x_1^3 = x_2$ și $x_2^3 = x_1$?

- | | | |
|-------------|-----------------|---------|
| a) niciunul | b) 100 | c) 4 |
| d) 1000 | e) o infinitate | f) unul |

AL 331 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) 0 | b) $9c - a^2 + 2ab$ | c) $2ab - a^3 - 9c$ |
| d) $4ab - 9c - a^3$ | e) $9c + a^2 - 4ab$ | f) $c - a + bc$ |

AL 332 Împărțind polinomul X^8 la $X - 1$ se obține câtul q_1 și restul r_1 , împărțind polinomul q_1 la $X - 1$ se obține câtul q_2 și restul r_2 , iar continuând procedeul și definind recursiv polinoamele q_{k+1} și restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul și restul împărțirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, să se determine r_5 .

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|--------|--------|
| a) 1 | b) 2 | c) 7 | d) 70 | e) 100 | f) 700 |
|------|------|------|-------|--------|--------|

AL 333 Fie α, β, γ soluțiile ecuației $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Să se determine $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}$.

- | | | | | | |
|-------|-------------------|------|------------------|------|-------|
| a) -3 | b) $-\frac{1}{3}$ | c) 0 | d) $\frac{1}{3}$ | e) 3 | e) 27 |
|-------|-------------------|------|------------------|------|-------|

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120^\circ - \cos^2 30^\circ$.

- a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$. Să se calculeze $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- a) 1 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) 0 f) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2 \cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{12}$ f) $\frac{5\pi}{12}$

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \frac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ este:

- a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

TG 7 Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\cos x^\circ = -\cos 40^\circ,$$

unde x este cuprins între 0 și 360.

- a) $x \in \{140, 220\}$ b) $x \in \{135, 200\}$ c) $x \in \{135, 315\}$
d) $x \in \{45, 315\}$ e) $x \in \{125, 320\}$ f) $x \in \{135, 345\}$

TG 8 Se consideră următoarele propoziții matematice:

- (i) $\sin 144^\circ = \cos 54^\circ$; (ii) $\cos 2018^\circ = -\cos 38^\circ$;
(iii) $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$; (iv) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 85^\circ = \frac{3}{2}$;
(v) $(\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 80^\circ) \cos 70^\circ = 2 \sin 110^\circ$.

Câte dintre acestea sunt false?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 9 Care dintre numerele

$a = \cos 55^\circ$, $b = \sin 155^\circ$, $c = \sin 15^\circ$, $d = \cos 170^\circ$, $e = \cos 100^\circ$, $f = \sin 106^\circ$
este cel mai aproape de zero?

- a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 10 Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ satisfac condiția $\cos a + \cos b = 0$.

- a) $\operatorname{tg}(a+b)+1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 11 Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

- a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

TG 12 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 13 Să se calculeze $\cos \frac{3a}{2}$, știind că $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 14 Să se calculeze suma valorilor lui $x \in [0, \pi]$ ce verifică ecuația

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) π f) $\frac{3\pi}{2}$

TG 15 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Să se calculeze $\sin x$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 16 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) 2 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 17 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - m}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f , iar $m \in \{-2, -\sqrt{2}, -1, 2\sqrt{2}, \pi\}$. Pentru câte dintre valorile lui m avem că $D = \mathbb{R}$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 18 Fie $x \in [0, 2\pi]$ astfel încât $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\cos 4x$.

- a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) 1

TG 19 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă și valoarea minimă a funcției f .

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8

TG 20 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

TG 21 Fie $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$. Să se calculeze $\cos 8x$.

- a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

TG 22 Să se calculeze $\cos(x + 2y)$ știind că $x = \frac{4\pi}{3}$ și $\operatorname{tg} y = 2 - \sqrt{3}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 23 Fie a și b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ și } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a - b)$.

- a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

TG 24 Fie funcția $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f .

- a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

TG 25 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Să se determine imaginea funcției f .

- a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 26 Aria unui triunghi dreptunghic isoscel ABC , $AB = AC$, este egală cu 8. Să se calculeze lungimea ipotenuzei.

- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 4 e) $4\sqrt{2}$ f) 8

TG 27 Lungimile laturilor unui triunghi sunt $3, 3\sqrt{3}, 6$. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului.

- a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) 3 f) $2\sqrt{3}$

TG 28 Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul dreptunghic de catete 5 și 12.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $2\sqrt{3}$ f) 3

TG 29 Fie triunghiul ABC cu $AC = 5$, $AB = 8$ și $\cos A = \frac{1}{4}$. Să se calculeze lungimea laturii BC .

- a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 30 Fie triunghiul PQR cu $PQ = 4$, $QR = 5$ și $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

- a) $\frac{29}{35}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{4}{7}$

TG 31 În triunghiul ABC , $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

TG 32 Aria triunghiului ABC este 10 m^2 . Să se determine AB știind că $AC = 4 \text{ m}$ și unghiul $\widehat{BAC}$ are 30° .

- a) $\frac{10}{3} \text{ m}$ b) 5 m c) $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ d) 10 m e) 20 m f) 8 m

TG 33 Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul $\widehat{ABC}$ de 30° . Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

- a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) $4\sqrt{3}\text{ cm}$ e) $3\sqrt{3}\text{ cm}$ f) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

TG 34 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ și $\text{tg } A = -\sqrt{2}$. Să se afle lungimea lui BC .

- a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 35 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$. Dacă punctul P aparține laturii BC astfel încât $BP = 6$, să se calculeze AP .

- a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 36 Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine valoarea lui $\sin C$.

- a) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 37 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 și un unghi de 60° . Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 38 Fie punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ și $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC .

- a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{20}{\sqrt{89} + 40\sqrt{3}}$ f) 4

TG 39 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ și $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei (AD), $D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $3 - \sqrt{6}$ | b) $\sqrt{2} - 6$ | c) $\sqrt{6} - 2$ |
| d) $3\sqrt{6} - 6$ | e) $\sqrt{6} - 6$ | f) $3\sqrt{6} - 3$ |

TG 40 Triunghiul ABC are o latură de 9 cm și perimetrul de 50 cm . Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------------|
| a) 90 cm^2 | b) 120 cm^2 | c) $120\sqrt{2}\text{ cm}^2$ |
| d) 200 cm^2 | e) 400 cm^2 | f) $300\sqrt{2}\text{ cm}^2$ |

TG 41 Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC ce are aria egală cu 18. Se notează cu $\mathcal{M}_G$ mulțimea punctelor din interiorul triunghiului situate mai aproape de G decât de oricare dintre vârfurile triunghiului. Să se calculeze aria mulțimii $\mathcal{M}_G$.

- | | | | | | |
|------|----------------|------|----------------|-------|-------|
| a) 6 | b) $6\sqrt{3}$ | c) 9 | d) $9\sqrt{3}$ | e) 12 | f) 15 |
|------|----------------|------|----------------|-------|-------|

TG 42 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmațiile:

- | | |
|---|--|
| (i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$; | (ii) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$; |
| (iii) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$; | (iv) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{CD}$; |
| (v) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$; | (vi) $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. |

Câte dintre afirmațiile date sunt corecte?

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| a) 1 | b) 2 | c) 3 | d) 4 | e) 5 | f) 6 |
|------|------|------|------|------|------|

TG 43 Fie P și Q mijloacele bazelor AB și CD ale trapezului $ABCD$. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{PQ}$.

- | | | | | | |
|------------------|------|------------------|------|------------------|------|
| a) $\frac{1}{2}$ | b) 1 | c) $\frac{3}{2}$ | d) 2 | e) $\frac{5}{2}$ | f) 3 |
|------------------|------|------------------|------|------------------|------|

TG 44 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P și Q împart latura BC în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 45 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(7, 2)$ și $C(a, b)$. Dacă $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, atunci $a - b$ este:

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

TG 46 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(6, 4)$ și M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a + b$ este:

- a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

TG 47 Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a + 1)\vec{j}$, $\vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{w} = (2a + 4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a - b$.

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

TG 48 Se consideră vectorii coliniari $\vec{u} = -b\vec{i} + (a + 1)\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} - 2b\vec{j}$ și $\vec{w} = (2a + 2)\vec{i} + 2\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se calculeze $a + b$.

- a) -4 b) -3 c) -1 d) 2 e) 3 f) 4

TG 49 Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC} = \vec{i} + a\vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 1 f) 3

TG 50 Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $M(1, 1)$, $N(5, -1)$, $P(3, 5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$

b) $12\sqrt{5}$

c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$

d) 30

e) $8\sqrt{5} + 12$

f) $6\sqrt{5} + 14$

TG 51 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare, unde $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(-5, -1)$ și $D(0, a)$.

a) 1

b) 2

c) 6

d) 7

e) 14

f) 15

TG 52 Fie punctele $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $P(a, 2)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a știind că P aparține dreptei AB .

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) 3

f) 8

TG 53 Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

a) 6

b) 4

c) -6

d) -4

e) 3

f) -3

TG 54 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(2, 6)$. Să se calculeze distanța de la punctul $O(0, 0)$ la punctul de intersecție dintre dreapta suport a medianei din A și dreapta suport a înălțimii din B .

a) $2\sqrt{65}$

b) $\sqrt{218}$

c) $3\sqrt{34}$

d) 16

e) $8\sqrt{5}$

f) $8\sqrt{6}$

TG 55 Pornind din punctul A de coordonate $(6, -1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant față de dreapta $d: x + 2y + 2 = 0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanța parcursă de P între cele două axe de coordonate.

a) $\frac{9}{2}$

b) $2\sqrt{5}$

c) 4

d) $\frac{\sqrt{89}}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

f) $2\sqrt{6}$

TG 56 Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele $d_1 : 3x + 4y - 2 = 0$ și $d_2 : y = mx - \frac{1}{m}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

- a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 57 Fie punctele $A(0, 4)$ și $B(4, 0)$. Punctul $C(a, b)$ aparține segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a - b$.

- a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5} - 8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2} - 2$ f) $2\sqrt{5} - 4$

TG 58 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) și $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanță de A se intersectează dreptele MN și BC ?

- a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

TG 59 Prin simetricul punctului $A(-2, 3)$ față de punctul $B(1, 2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta d .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 60 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $\left(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conțin cel puțin două dintre punctele considerate pot fi construite?

- a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 61 Fie $O(0,0)$, $A(-1,4)$, $B(5,1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui față de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB .

- a) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ b) $(2, 3)$ c) $\left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$
d) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

TG 62 Un punct din primul cadran se numește *bine plasat* dacă distanța de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conține dreapta $d: 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 63 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC , unde $A(1,1)$, $B(4,5)$ și $C(5,4)$. Să se calculeze distanța de la P la dreapta AB .

- a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10 + \sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10 + \sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10 - \sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 64 Fie $A(2,0)$, $B(0,4)$ și $C(5,a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $Q(x_0, y_0)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , să se calculeze $x_0 - y_0$.

- a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 65 Fie $A(3,0)$, $B(0,3)$ și fie $C(a,b)$ pe dreapta $x + y = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC , să se calculeze $x_0 + y_0$.

- a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 66 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
 d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$

TG 67 Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ față de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P și Q . Să se calculeze aria triunghiului POQ .

- a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 68 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x + 2y - 9 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$ și $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0, 0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C . Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}; 1$ d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2}; 1$

TG 69 Fie P mijlocul segmentului (AB) , unde $A(4, 0)$ și $B(0, 2)$, iar M, N proiecțiile punctului P pe Ox , respectiv Oy . Dacă Q este punctul de intersecție a perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP , iar R punctul de intersecție a perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP , să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

- a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 70 Prin punctul A de intersecție a dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se arate că raportul distanțelor de la P la d_1 , respectiv la d_2 este constant și să se determine valoarea lui.

- a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 71 Fie punctele $A(2, 1)$, $B(6, 1)$, $C(4, 5)$ și mulțimea $\mathcal{M}_A$ a punctelor din primul cadran situate mai aproape de A decât de celelalte două puncte date. Să se calculeze aria mulțimii $\mathcal{M}_A$.

- a) 12 b) 13 c) 14 d) $\frac{23}{2}$ e) $\frac{25}{2}$ f) $\frac{31}{2}$

TG 72 Prin simetricul punctului $A(4, 2)$ față de punctul $B(-1, 1)$ se construiește o dreaptă d de pantă $\frac{3}{2}$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează d în punctul C . Să calculeze aria triunghiului ABC .

- a) $\frac{49}{2}$ b) 13 c) 26 d) $\frac{39}{2}$ e) 36 f) $\frac{13}{2}$

TG 73 Mulțimea punctelor $P(x, y)$ aflate la distanța r de punctul $Q(a, b)$ formează cercul de centru Q și rază r . Să se determine ecuația ce descrie acest cerc.

- a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ b) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - r^2 = 0$
c) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$ d) $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
e) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$ f) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

TG 74 Se consideră punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanța r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care dintre următoarele ecuații este verificată de toate punctele $P(x, y)$ ce se află la distanța r de punctul Q .

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 3 = 0$ d) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

TG 75 Să se determine ecuația cercului cu centrul situat pe dreapta de ecuație $4x + y - 16 = 0$, ce trece prin punctele $A(4, 1)$ și $B(6, 5)$.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 43 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 13 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 15 = 0$

TG 76 Se consideră punctul $Q(1, 0)$ și cercul de ecuație

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 100.$$

Dacă punctul $P_0(x_0, y_0)$ este situat pe cerc la distanța maximă de Q , să se calculeze $x_0 + y_0$.

a) 12

b) 0

c) 14

d) 16

e) 24

f) 22

TG 77 Punctul $M(-2, 1)$ se rotește în jurul punctului $O(0, 0)$ în sens trigonometric cu 60° , obținându-se astfel punctul $M'(a, b)$. Să se calculeze $4a - 2b$.

a) -5

b) 0

c) 5

d) -1

e) -2

f) -6

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(simbol AM)

AM 1 Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?

P_1 : $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton

P_2 : $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit

P_3 : $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent

P_4 : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

P_5 : $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ este crescător

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 2 Fie şirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 2}$, $(z_n)_{n \geq 1}$, $(w_n)_{n \geq 9}$ cu termenii generali

$$x_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, y_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, z_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}, w_n = \frac{\sqrt{n!} + (-1)^n}{n!}.$$

Atunci:

a)	(x_n) este descrescător	b)	(x_n) nu este monoton
	(y_n) nu este monoton		(y_n) nu este monoton
	(z_n) nu este monoton		(z_n) este descrescător
	(w_n) nu este monoton		(w_n) este descrescător

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---------------------------|
| | (x_n) nu este monoton | | (x_n) este descrescător |
| c) | (y_n) nu este monoton | d) | (y_n) este crescător |
| | (z_n) nu este monoton | | (z_n) nu este monoton |
| | (w_n) nu este monoton | | (w_n) este descrescător |
| | | | |
| | (x_n) este descrescător | | (x_n) nu este monoton |
| e) | (y_n) este descrescător | f) | (y_n) este descrescător |
| | (z_n) nu este monoton | | (z_n) nu este monoton |
| | (w_n) nu este monoton | | (w_n) este descrescător |

AM 3 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + n^{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

- a) 1 b) 2 c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{10}$ f) $\sqrt{5}$

AM 4 Să se studieze existența limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^n \sin \frac{n! \pi}{49}$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{7}$ b) 0 c) $\frac{\pi}{7}$ d) 7 e) $\frac{1}{49}$ f) nu există

AM 5 Se considera limitele $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-5})}$,
 $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{4n+5} - \sqrt{3n-5})}$ și $L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{3n^2+5} - \sqrt{3n^2-5})}$.

Atunci

- | | |
|--|---|
| a) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = \infty$ | b) $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ |
| c) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = 0$ | d) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \infty, L_3 = \infty$ |
| e) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = \infty$ | f) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = 0$ |

AM 6 Să se determine parametrii reali a și b astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{8n^3 + bn^2 + a} - an + b \right) = 13.$$

- a) $a = -2, b = 12$ b) $a = 2, b = 12$ c) $a = 2, b = 10$
 d) $a = 2, b = 8$ e) $a = -2, b = 13$ f) $a = 2, b = 6$

AM 7 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

- a) ∞ b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{2}$ f) e

AM 8 Fie $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n + \frac{k}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $1 - \ln 2$ d) 1 e) 2 f) ∞

AM 9 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{n^3 + k^2}$.

- a) 2 b) 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) ∞

AM 10 Fie $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k j^2 \right), n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{n^4}.$$

- a) 1 b) e c) e^3 d) e^4 e) e^{12} f) ∞

AM 11 Să se calculeze limita şirului cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k-1}{3^k \cdot k!}$.

- a) 0 b) 1 c) 3 d) $\ln 3$ e) 2 f) ∞

AM 12 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{25k^2 - 15k - 4}$.

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) 0 d) 5 e) $\frac{4}{25}$ f) 15

AM 13 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6k+1}{4^k}$.

- a) ∞ b) 7 c) 6 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 3

AM 14 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^1 + 2(n-1)C_n^2 + 3(n-1)^2 C_n^3 + \cdots + n(n-1)^{n-1} C_n^n}{1 + nC_n^1 + n^2 C_n^2 + \cdots + n^n C_n^n}.$$

- a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e+1$ f) ∞

AM 15 Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$x_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{3}{4}$ d) $\ln 3$ e) $\frac{1}{2}$ f) ∞

AM 16 Să se studieze existența limitelor

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi n + (-1)^{n+1}}{4n} \right) \quad \text{și} \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi n^2 + (-1)^n}{4n^2} \right)$$

și, dacă acestea există, să se precizeze valoarea lor.

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) $L_1 = L_2 = 1$ | b) $L_1 = \frac{1}{4}$ și L_2 nu există |
| c) $L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = 1$ | d) L_1 nu există și $L_2 = 1$ |
| e) $L_1 = L_2 = \frac{1}{4}$ | f) L_1 și L_2 nu există |

AM 17 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

- | | | | | | |
|------|------------------|------|------|------|-------------|
| a) 0 | b) $\frac{1}{2}$ | c) 1 | d) 2 | e) 3 | f) ∞ |
|------|------------------|------|------|------|-------------|

AM 18 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$. Atunci:

- șirul este crescător și mărginit
- șirul este crescător și are limita ∞
- șirul este crescător și are limita $\sqrt{2}$
- șirul este descrescător și nemărginit
- șirul este descrescător și are limita $\sqrt{2}$
- șirul este mărginit și nemonoton

AM 19 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- | | | | | | |
|------|------------------|------|--------|------------|-------------|
| a) 0 | b) $\frac{1}{e}$ | c) 1 | d) e | e) $e + 1$ | f) ∞ |
|------|------------------|------|--------|------------|-------------|

AM 20 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$.

- a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 21 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 2^x}{2^x - 4}$.

- a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\frac{1}{\ln 2}$ e) $\ln \sqrt{2}$ f) e

AM 22 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{12x} + 1)}{\ln(1 + e^{3x})}$.

- a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) ∞ f) 1

AM 23 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) $\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{2}$

AM 24 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \pi}{x - \pi} \right)^x$.

- a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^π d) π^2 e) π f) e

AM 25 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1) - \cos x + e^{x^2}}{10x^2}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{5}{4}$

AM 26 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) nu există c) 1 d) ∞ e) -1 f) $-\infty$

AM 27 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{e^x - 1}$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) nu există c) 1 d) ∞ e) -1 f) $-\infty$

AM 28 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) $-\infty$ b) 0 c) ∞ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 29 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) ∞ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 30 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(e^{\frac{1}{x^2+1}} - e^{\frac{1}{x^2}} \right)$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 31 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{x}{4} \right]}{x}$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 32 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1))$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 33 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) ∞

AM 34 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x \right)$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) -1 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) ∞ f) $-\infty$

AM 35 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + a) - x)(e^x + x) = 1.$$

- a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 36 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $a \in [0, \infty)$ pentru care limita

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x^a}$$

există și este un număr real nenul.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2, \infty)$ e) $(0, 2)$ f) $\{0, 3\}$

AM 37 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x.$$

- a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) ∞

AM 38 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\frac{1}{e^2}$

AM 39 Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(2 - \{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\frac{3}{2}$

AM 40 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) ∞ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 41 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

- a) 0 b) 1 c) $n(n+1)$
d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $n+1$ f) n

AM 42 Să se determine parametrul $a \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 43 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{|x|}$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 44 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x}.$$

.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) ∞ e) $\frac{n}{2}$ f) $\frac{n(n+1)}{4}$

AM 45 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (26 - 5x)^{\frac{1}{x-5}}.$

- a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^5 f) e^{-1}

AM 46 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\frac{1}{\ln x} \right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) ∞ f) nu există

AM 47 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln |x|} \right\},$$

unde $\{t\}$ este partea fracționară a lui t , iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{2}{e}$

AM 48 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

- a) ∞ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 49 Fie $a \in (0, \infty)$. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

- a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 50 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}}.$$

- a) n b) 0 c) 1 d) $\frac{n}{2}$ e) $\frac{n(n+1)}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

AM 51 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{12} - \sin^{12}(x)}{x^{14}}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 6 e) 12 f) 24

AM 52 Fie $n \in \mathbb{N}, n > 1$, și $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră funcția

$$h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) ∞ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

AM 53 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |2x^2 + x|, g(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Să se calculeze media geometrică a următoarelor trei limite:

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{g(x)}, \ell_2 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)^{g(x)}, \ell_3 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)^{g(x)}.$$

- a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c) $\sqrt[3]{e}$ d) e e) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ f) $\sqrt{e}$

AM 54 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right].$$

- a) $-\frac{e}{2}$ b) $-e$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) e f) $\frac{e}{2}$

AM 55 Fie m un parametru real și

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt[3]{mx^2 - 1}}{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}.$$

Să se arate că valoarea expresiei $E = 3L - m\sqrt{2}$ este independentă de m și să se precizeze valoarea lui E .

- a) $E = -\sqrt{2}$ b) $E = 2$ c) $E = 3\sqrt{2}$
d) $E = 3$ e) $E = 2\sqrt{2}$ f) $E = -2\sqrt{2}$

AM 56 Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x.$$

- a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x - \frac{1}{2}$
d) $y = -2x - \frac{1}{2}$ e) $y = -2x + \frac{1}{2}$ f) $y = 2x + \frac{1}{2}$

AM 57 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și, în cazul în care acestea există, să se determine ecuațiile lor.

- a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$ c) $y = \pm \frac{\pi}{2}x + 1$
d) $y = \pm \frac{\pi}{2}x - 1$ e) nu există f) $y = \frac{\pi}{2}x$

AM 58 Să se studieze existența asimptotei spre ∞ la graficul funcției

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine ecuația sa.

a) $y = x + \frac{1}{2}$

b) $y = \sqrt{2}x$

c) $y = x + 1$

d) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) nu există

f) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 59 Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

și, în cazul în care acestea există, să se determine ecuațiile lor.

a) $y = x$

b) $y = x + 1$

c) $y = 0$

d) nu există asimptote

e) $x = 0$

f) $x = 0$ și $y = 0$

AM 60 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și, în cazul în care acestea există, să se determine ecuațiile lor.

a) $y = 0$

b) $y = x$

c) nu există

d) $y = x + 1$

e) $x = 0$

f) $y = 2x$

AM 61 Fie $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$. Să se determine ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f .

a) $y = 0$

b) $y = 1$

c) $y = 2$

d) $y = x$

e) $y = 2x$

f) Toate răpunsurile precedente sunt greșite

AM 62 Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului a astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- | | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| a) $(0, \infty)$ | b) $\{1\}$ | c) $(-1, 2)$ |
| d) $\emptyset$ | e) $[0, \infty)$ | f) $\mathbb{R}$ |

AM 63 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine valorile parametrilor reali a, b astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției f .

- | | | |
|--------------------|-------------------------------|------------------------------|
| a) $a = 0, b = -2$ | b) $a = 1, b = 0$ | c) $a = 0, b \in \mathbb{R}$ |
| d) $a = 0, b = 3$ | e) $a = -2, b \in \mathbb{R}$ | f) $a = 0, b = 0$ |

AM 64 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

- a) $x = 0$ este asimptotă verticală
- b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$
- c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$
- d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
- e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
- f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

a) $y = 0$ b) $y = x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}$
d) $y = -\frac{\pi}{2}x$ e) $y = -\frac{\pi}{4}$ f) $y = 2\pi x$

AM 66 Să se determine asimptotele la graficul funcției

- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 67 Să se determine asimptotele la graficul funcției

a) $y = 2x, \quad y = -2x$ b) $y = 1 + x, \quad y = -x$ c) $y = 1 - x, \quad y = x$
d) $y = x, \quad y = -x$ e) $y = 1 - x, \quad y = 1 + x$ f) $y = 2x, \quad y = 1 - x$

AM 68 Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a},$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiție. Știind că funcția f nu are asimptote verticale, să se studieze existența altor asimptote la graficul funcției f și, în cazul în care acestea există, să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|-----------------------|-------------------|---------------------|
| a) $y = 0, y = -x$ | b) $y = 0$ | c) $y = 0, y = x$ |
| d) $y = 0, y = x + 1$ | e) $y = 1, y = x$ | f) nu are asimptote |

AM 69 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiție. Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

- | | | |
|--------------------|------------------------|--------------------|
| a) $x + y + 2 = 0$ | b) $y = x - 2$ | c) $x = 2$ |
| d) $y = 2 - x$ | e) $x = 2, y = -x - 2$ | f) $y = \pm x + 2$ |

AM 70 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$. Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?

P_1 : f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

P_2 : f admite asimptotă oblică spre $-\infty$.

P_3 : Axa Ox este una dintre asimptotele funcției f .

P_4 : f admite cel puțin o asimptotă verticală, printre care dreapta de ecuație $x = 1$.

P_5 : f admite cel mult o asimptotă orizontală.

P_6 : f admite exact o asimptotă oblică, care este o dreaptă ce trece prin origine.

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| a) 0 | b) 1 | c) 2 | d) 3 | e) 4 | f) 5 |
|------|------|------|------|------|------|

AM 71 Fie $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f . Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?

P_1 : Dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_2 : Dreapta de ecuație $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_3 : Nu se pune problema existenței asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_4 : Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

P_5 : Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției f .

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 72 Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \left[\frac{2}{x} \right], & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

a) 0 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\frac{1}{3}$

AM 73 Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine a astfel încât funcția f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

- a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 74 Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

- a) f este continuă pe $[0, 1]$
 b) f este discontinuă în punctul $x = 0$
 c) f este discontinuă în punctul $x = \frac{1}{2}$
 d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$
 e) f este discontinuă în punctul $x = 1$
 f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 75 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \setminus \{\pi\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|$$

în punctul π . În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelunge $\tilde{f}$.

- a) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$
 b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$
 c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$
 d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$

f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

AM 76 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(3 \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

în punctele $a = -1$ și $b = 1$. În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelungite $\tilde{f}$.

a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1, 1]$

b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

c) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3\pi, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} -3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

AM 77 Fie funcția continuă $f : [1, 100) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x . Dacă $\text{Im} f = [m, M]$, să se determine $M - m$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $a^2 + a$ d) ab e) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ f) $\frac{(a + b)^2}{4}$

AM 78 Se consideră funcțiile $f, g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [1, e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x + 1))}{\ln(1 + f(x))}.$$

Notăm

$$A = \{x \in (0, e) : g \text{ este discontinuă în } x\}.$$

Să se calculeze $S = \sum_{a \in A} a$.

a) 1 b) $1 + e$ c) $1 - e$ d) $e - 1$ e) 0 f) e

AM 79 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f . Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale funcției f .

a) $[1, 4)$ b) $[1, 4]$ c) $(0, \infty)$ d) $[1, \infty)$ e) $(1, \infty)$ f) $[1, \infty) \setminus \{4\}$

AM 80 Se consideră funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1 + |x|}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se determine mulțimea C a punctelor de continuitate ale lui f , respectiv mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f .

a) $C = D_1 = (0, \infty)$ b) $C = [0, \infty)$, $D_1 = (0, \infty)$
 c) $C = D_1 = \mathbb{R}$ d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$
 e) $C = \mathbb{R}$, $D_1 = \mathbb{R}^*$ f) $C = [-1, 1]$, $D_1 = (-1, 1)$

AM 81 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) f este continuă și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- c) f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $2f(1) = f'(1)$
- d) f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = f'(1)$
- e) f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = 2f'(1)$
- f) f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = -f'(1)$

AM 82 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției în punctul $x_0 = 1$ și, în caz afirmativ, să se calculeze $f'(1)$.

- a) f este derivabilă și $f'(1) = \frac{1}{e}$
- b) f este derivabilă și $f'(1) = -\frac{1}{e}$
- c) f este derivabilă și $f'(1) = 0$
- d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$
- e) f este derivabilă și $f'(1) = e$
- f) f este derivabilă și $f'(1) = -e$

AM 83 Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ, să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă și $f'(0) = -1$
- b) f este derivabilă și $f'(0) = 1$
- c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
- d) f este derivabilă și $f'(0) = 0$
- e) f este derivabilă și $f'(0) = 2$
- f) f este derivabilă și $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM 84 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $a = 4, \quad b = 0$ | b) $a = 3, \quad b = 0$ | c) $a = 0, \quad b = 0$ |
| d) $a = 0, \quad b = 4$ | e) $a = 4, \quad b = 1$ | f) $a = -1, \quad b = 4$ |

AM 85 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinați parametrii reali a, b astfel încât funcția f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

- | | | |
|------------------------------|----------------|------------------------------|
| a) $a = 1, b \in \mathbb{R}$ | b) $a = b = 0$ | c) $a \in \mathbb{R}, b = 0$ |
| d) $a = 1, b = 0$ | e) $a = b = 1$ | f) $a = 0, b = 1$ |

AM 86 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcției f .

- | | | |
|--|--|--|
| a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ | b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ | c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ |
| d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ | e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ | f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$ |

AM 87 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale graficului funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| a) 0 | b) 1 | c) 2 | d) 3 | e) 4 | f) 5 |
|------|------|------|------|------|------|

AM 88 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Determinați domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate D_1 .

- a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

AM 89 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min \{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ nu este derivabilă în } x\}.$$

Să se calculeze $S = \sum_{x \in A} x^2$.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 90 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2 + 1)^{x^2+1}$.

- a) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ b) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$
- c) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ d) $2x [\ln(x^2 + 1) + 1]$
- e) $2x(x^2 + 1) [\ln(x^2 + 1) + 1]$ f) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$

AM 91 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1 - x^2) + \sqrt{x^2 + 1}$. Să se calculeze derivata funcției f în $x_0 = 1$.

a) $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2} - 4}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sqrt{2}$

f) $-2 + \sqrt{2}$

AM 92 Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) nu există

AM 93 Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t} \cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine accelerația mobilului după 2 secunde.

a) $e^{-2} \cos 2$ b) $2e^{-2} \cos 2$ c) $2e^{-2} \sin 2$
 d) $e^{-2} \sin 2$ e) $\frac{e^{-2} \sin 2}{2}$ f) $\frac{e^{-2} \cos 2}{2}$

AM 94 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă și, în caz afirmativ, să se calculeze limita

$$L = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

a) f este inversabilă și $L = \infty$ b) f este inversabilă și $L = 0$
 c) f este inversabilă și $L = 1$ d) f este inversabilă și $L = e$
 e) f este inversabilă și $L = e^{-1}$ f) f nu este inversabilă

AM 95 Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_0(x) = \frac{x}{e^x}$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

- a) 0 b) xe^{-x} c) xe^{-2x}
d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

AM 96 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g : (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mxf'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

- a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) -1

AM 97 Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$. Să se calculeze $f'(x)$.

- a) $f'(x) = \frac{x}{2}$ b) $f'(x) = \frac{1}{x + \pi}$ c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x + \pi}}$
d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

AM 98 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = |x^2 + |x^2 - x| - 1|.$$

Notăm cu M mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă și $S = \sum_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcției f în punctul x . Să se determine S .

- a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM 99 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietățile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ și $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(0) = 1, f'(x) = 5x$ | b) $f(0) = 0, f'(x) = 5x$ |
| c) $f(0) = 2, f'(x) = 2x + 5$ | d) $f(0) = 1, f'(x) = 5x + 2$ |
| e) $f(0) = 0, f'(x) = 5x + 2$ | f) $f(0) = 0, f'(x) = 2x + 2$ |

AM 100 Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Să se determine mulțimea valorilor lui a astfel încât funcția f să fie convexă.

- a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ d) $\emptyset$ e) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

AM 101 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

- a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 102 Fie funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(e)$.

- a) $\frac{1}{e+1}$ b) 0 c) $\frac{1}{e}$ d) nu există e) $\frac{1}{e^e+1}$ f) $e^e + 1$

AM 103 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2012 - 2013 \sqrt[2013]{x}$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

- | | | |
|----------------|----------------|------------|
| a) $y = x - 1$ | b) $y = x + 1$ | c) $y = x$ |
| d) $y = 0$ | e) $y = 1$ | f) $y = 2$ |

AM 104 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$, în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|------------------|
| a) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ | b) $y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ | c) $y = 3$ |
| d) $y = x + 2$ | e) $y = 2x + 1$ | f) $y = -2x + 1$ |

AM 105 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x},$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a) $y = 7x - 11$ | b) $y = 7x$ | c) $y = 11x - 7$ |
| d) $7y = x - 11$ | e) $7y = x + 11$ | f) $y = 7x - 4$ |

AM 106 Pentru ce valoare a parametrului real a dreapta $y = ax - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$?

- | | | | | | |
|------|-------|------|------|-------|------|
| a) 1 | b) -1 | c) 7 | d) 2 | e) -2 | f) 0 |
|------|-------|------|------|-------|------|

AM 107 Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x = 0$ și $x = 3$.

- | | | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $\frac{1}{3}$ | b) $-\frac{1}{3}$ | c) $\frac{1}{4}$ | d) $\frac{5}{4}$ | e) $\frac{3}{4}$ | f) $\frac{4}{3}$ |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|

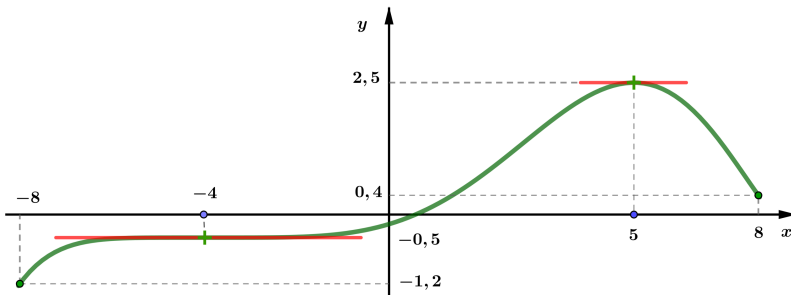
AM 108 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$.

- a) $(1, 1)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 0)$
 d) $(2, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

AM 109 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$. Să se determine punctul de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

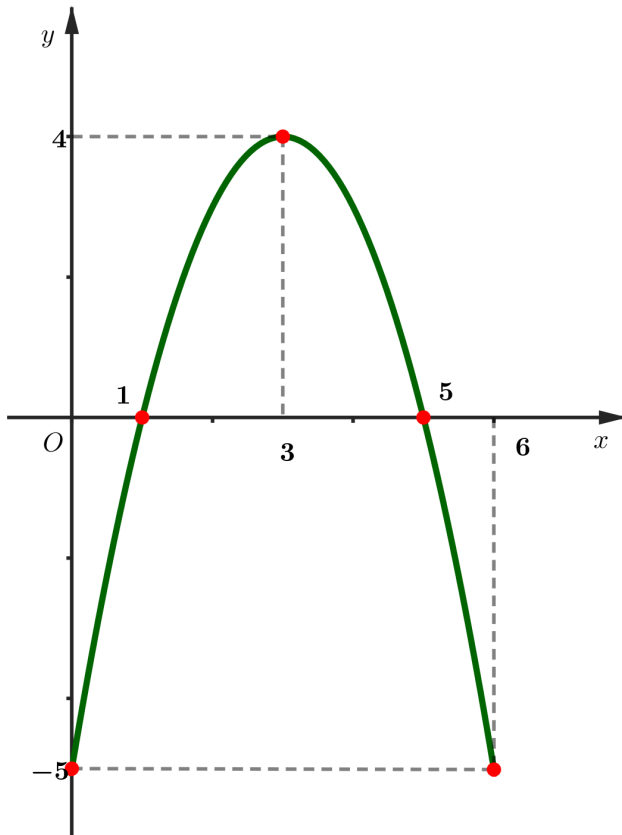
- a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$
 d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

AM 110 Graficul derivatei unei funcții f , derivabilă pe $[-8, 8]$, este dat în figura următoare:



Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției f are exact două tangente paralele cu dreapta $y = mx$.

- a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$
 d) $\left[\frac{5}{2}, \infty, \right)$ e) $\left[\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$ f) $[-8, 8]$



AM 115 Graficul derivatei unei funcții $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ este dat la problema **AM 114**. Care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1 : x = 1$ este punct de minim local al funcției f ;

$P_2 : x = 5$ este punct de maxim local al funcției f ;

$P_3 : x = 1$ este punct de maxim local al funcției f ;

$P_4 : x = 5$ este punct de minim local al funcției f ;

$P_5 : \text{funcția } f \text{ nu are puncte de extrem local};$

$P_6 : x = 3$ este punct de maxim local al funcției f .

a) P_1 și P_2

b) P_3

c) P_4

d) P_5

e) P_6

f) P_3 și P_4

AM 116 Fie funcția $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabilă, al cărei grafic este dat la problema **AM 114**. Care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1 : f$ este convexă pe $(0, 3)$;

$P_2 : f$ este concavă pe $(3, 6)$;

$P_3 : f$ este convexă pe $(3, 6)$;

$P_4 : f$ este concavă pe $(0, 3)$;

$P_5 : f$ este convexă pe $(0, 6)$;

$P_6 : f$ este concavă pe $(0, 6)$.

a) P_1 și P_2

b) P_3

c) P_4

d) P_5

e) P_6

f) P_3 și P_4

AM 117 Fie funcția $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabilă, al cărei grafic este dat la problema **AM 114**. Care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1 : f$ nu are puncte de inflexiune;

$P_2 : x = 1, x = 5$ sunt puncte de inflexiune ale funcției f ;

$P_3 : x = 3$ este punct de inflexiune al funcției f ;

$P_4 : x = 1$ este punct de inflexiune al funcției f ;

$P_5 : x = 5$ este punct de inflexiune al funcției f ;

$P_6 : x = 0, x = 6$ sunt puncte de inflexiune ale funcției f .

a) P_1

b) P_2

c) P_3

d) P_4

e) P_5

f) P_6

AM 118 Funcția $f : D_{\max} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{ab}{a + (b - a)e^{-rt}}$, cu parametrii a, b și r pozitivi, numită funcția logistică, modelează evoluția numărului de indivizi ai unei specii. Să se precizeze care dintre următoarele propoziții este adevărată:

a) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită și își atinge marginile;

b) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare și nemărginită pe $D_{\max}$;

- c) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită și își atinge marginile;
- d) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită, dar nu își atinge marginile;
- e) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită, dar nu își atinge marginile;
- f) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare și nemărginită pe $D_{\max}$.

AM 119 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) $\emptyset$

AM 120 Fie $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f , precizând și natura acestora.

- a) $(e, 2e)$, minim local b) $\left(e, \frac{1}{2e}\right)$, maxim local
- c) $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$, maxim local d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local
- e) $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$, minim local f) $\left(\frac{1}{e}, 2e\right)$, minim local

AM 121 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

AM 122 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcției f .

- a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 123 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\emptyset$

AM 124 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$
d) $\{0, 1\}$ e) $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ f) $\emptyset$

AM 125 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7).$$

- a) $\{2, 4 \pm \sqrt{5}\}$ b) $\{4, 2 \pm \sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$
d) $\{4\}$ e) $\{4, 4 \pm \sqrt{5}\}$ f) $\{2, 2 \pm \sqrt{5}\}$

AM 126 Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

- a) un punct de minim local
- b) un punct de maxim local
- c) două puncte de maxim local
- d) două puncte de minim local
- e) un punct de minim local și un punct de maxim local
- f) nu are puncte de extrem local

AM 127 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - 3x^2|}.$$

- | | | |
|------------------|------------------|----------------|
| a) $\{0, 3\}$ | b) $\emptyset$ | c) $\{2\}$ |
| d) $\{0, 1, 3\}$ | e) $\{0, 2, 3\}$ | f) $\{-1, 3\}$ |

AM 128 Se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcției $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC .

- | | | | | | |
|------|------|------------------|------------------|------------------|---------------------|
| a) 1 | b) 2 | c) $\frac{1}{e}$ | d) $\frac{2}{e}$ | e) $\frac{4}{e}$ | f) $\frac{12}{e^3}$ |
|------|------|------------------|------------------|------------------|---------------------|

AM 129 Fie $m \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem local.

- | | | |
|------------------|--------------|--------------------|
| a) $\{-1\}$ | b) $(-1, 1)$ | c) $(-\infty, -1)$ |
| d) $(1, \infty)$ | e) $(0, 1)$ | f) $\mathbb{R}^*$ |

AM 130 Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2+x}.$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f , precizând și natura acestora.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(-1, e)$, maxim local | b) $(1, \frac{e}{3})$, minim local |
| c) $(-1, \frac{1}{e})$, maxim local | d) $(1, \frac{e}{3})$, maxim local |
| e) $(-1, \frac{1}{e})$, minim local | f) $(1, e)$, maxim local |

AM 131 Să se determine valoarea minimă a funcției

$$f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

- | | | | | | |
|---------------|--------------------|--------------------|----------------|----------------|------|
| a) $\sqrt{3}$ | b) $\frac{\pi}{6}$ | c) $\frac{\pi}{3}$ | d) $2\sqrt{3}$ | e) $4\sqrt{3}$ | f) 0 |
|---------------|--------------------|--------------------|----------------|----------------|------|

AM 132 Să se determine punctul de minim al funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

- | | | | | | |
|------|------|------|----------|--------------------|------------------|
| a) 2 | b) 1 | c) 0 | d) π | e) $\frac{\pi}{2}$ | f) $\frac{1}{2}$ |
|------|------|------|----------|--------------------|------------------|

AM 133 Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $a \neq b$ și funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x b^{1-x} + b^x a^{1-x}.$$

Atunci:

- a) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
- b) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
- c) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcției f
- d) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
- e) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
- f) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f

AM 134 Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x+1}.$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 135 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$ și mulțimile

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ este punct de extrem local al lui } f\},$$

respectiv

$$I = \{x \in \mathbb{R} : (x, f(x)) \text{ este punct de întoarcere al graficului funcției } f\}.$$

Știind că $|A|$ notează numărul de elemente ale unei mulțimi finite A , să se calculeze $|E|^{|I|}$.

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9 f) 6

AM 136 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|\ln|x-2||}}{x+1}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al lui f . Să se calculeze

$$S = \sum_{x \in E} f(x),$$

unde $E = \{x \mid x \in D, x \text{ este punct de extrem local al lui } f\}$.

a) $S = \frac{3}{4}$ b) $S = \frac{7}{4}$ c) $S = 3$ d) $S = \frac{5}{4}$ e) $S = \frac{3}{2}$ f) $S = 1$

AM 137 Fie g prelungita prin continuitate a funcției

$$f : (-9, 9) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{10 - |x + 1|}{\sqrt{81 - x^2}}.$$

Să se determine toate punctele de extrem local ale funcției g , precizând și natura acestora.

- a) 8 este punct de maxim local, -1 și $-\frac{81}{11}$ sunt puncte de minim local
b) -1 este punct de maxim local, 9 și $-\frac{81}{11}$ sunt puncte de minim local
c) -1 este punct de maxim local, 8 și $-\frac{81}{8}$ sunt puncte de minim local
d) -1 este punct de maxim local, $-\frac{81}{11}$ este punct de minim local
e) $-\frac{81}{11}$ este punct de minim local
f) -9 și -1 sunt puncte de maxim local, $-\frac{81}{11}$ și 9 sunt puncte de minim local

AM 138 Să se determine abscisa punctului din cadranul II corespunzător distanței maxime dintre graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x^2)$ și axa Ox .

a) -1 b) $-e$ c) $-\frac{1}{e}$ d) $-\frac{1}{e^2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

AM 139 Concentrația unui medicament în fluxul sanguin la t ore după administrare este

$$C(t) = \frac{13,6t}{(9,6t + 19,2)^2}.$$

În cât timp este atinsă concentrația maximă $C_{\max}$ a medicamentului? Care este durata de timp pentru care concentrația depășește $\frac{8}{9}$ din $C_{\max}$?

- a) $t_{\max} = 1$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore
- b) $t_{\max} = 3$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore
- c) $t_{\max} = 2$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore
- d) $t_{\max} = 1$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră
- e) $t_{\max} = 2$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore
- f) $t_{\max} = 3$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră

AM 140 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcției

$$f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x},$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

- a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 141 Fie A punctul aparținând graficului funcției

$$f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziane xOy . Să se afle distanța de la O la A .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

AM 142 Un camion trebuie să parcurgă 100 *km* cu o viteză constantă v *km/h* (cu condiția $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ *litri/h* de combustibil. Să se determine viteza pentru care costul este minim știind că șoferul este plătit cu 30 *lei/h* și combustibilul costă 7,5 *lei/litru*.

- a) 50 *km/h* b) 55 *km/h* c) 60 *km/h*
d) 65 *km/h* e) 70 *km/h* f) 45 *km/h*

AM 143 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferența dintre acesta și cubul său să fie maximă.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

AM 144 Să se determine mulțimea soluțiilor inecuației

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0.$$

- a) $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, \infty)$
d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AM 145 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$. Să se determine mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) - 1 > 0$.

- a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, -1)$ f) $\emptyset$

AM 146 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2 + 1 \geq a + 2 \ln x, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty).$$

- a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 147 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\emptyset$

AM 148 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m astfel ca ecuația $e^x = mx^2$ să aibă trei soluții reale și distincte.

- a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \frac{e^2}{8}\right)$
 d) $\left(\frac{e^2}{8}, \frac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\frac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\frac{e^2}{4}\right\}$

AM 149 Să se rezolve inecuația $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

- a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\{1\}$

AM 150 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0, & \text{dacă } x = -3. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcției f .

- a) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ b) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
 c) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
 e) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ f) f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$

AM 151 Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Să se determine imaginea funcției f .

- a) $[0, 1]$ b) $[0, \infty)$ c) $\mathbb{R}$
d) $[0, 10]$ e) $[1, 4]$ f) $\left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right]$

AM 152 Fie $P(t) = t^3 e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t > 0$ (puterea este măsurată în wați și timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

- a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 153 Fie triunghiul echilateral ABC de latură a . Pe laturile BA și BC se consideră punctele D , respectiv E , cu $BD = BE$. Se pliază triunghiul DBE de-a lungul lui DE , punctul B devenind B' , astfel încât planul triunghiului $B'DE$ să fie perpendicular pe planul inițial al triunghiului ABC . Să se determine volumul maxim al piramidei $B'ACED$.

- a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ d) $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ e) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

AM 154 Fie funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și propozițiile:

- (i) f este continuă, dar nu este derivabilă;
(ii) $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f ;
(iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f ;

(iv) $f'(0) = \frac{1}{2}$;

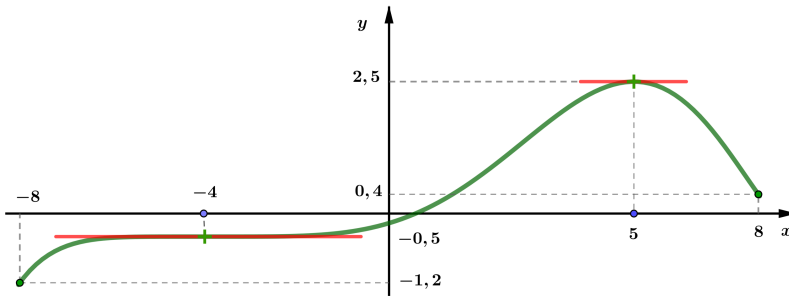
(v) f este strict crescătoare;

(vi) $\text{Im } f = \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre propozițiile date sunt adevărate?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 155 Graficul derivatei unei funcții f , de două ori derivabilă pe $[-8, 8]$, este dat în figura următoare:



Știind că acest grafic are exact 2 tangente orizontale, situate în punctele $(-4; f'(-4))$ și $(5; 2,5)$, să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 156 Pentru motocicliști, într-un concurs de motociclete, este importantă aflarea punctelor impuse schimbărilor de viraj, de la dreapta la stânga și de la stânga la dreapta, pentru ca parcursul să fie ideal. În ce punct de pe pistă un concurent trebuie să schimbe poziția de viraj a motocicletei de la stânga la dreapta, pentru a avea un parcurs optim, dacă traseul este descris de funcția $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0,05 \cdot x^4 + 1,2 \cdot x^2 + 2$, iar punctul de start este $S(-4, f(-4))$?

- a) $(0, 0)$ b) $(0, 2)$ c) $(-2, 6)$
 d) $(2, 6)$ e) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$ f) $\left(2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$

AM 157 Fie şirul (x_n) definit prin $x_1 = \frac{1}{e-1}$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e + 1$ f) ∞

AM 158 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface relaţia

$$2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = x$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{f^{(n)}(-1)}, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $f^{(n)}(x_0)$ semnifică derivata de ordinul n a lui f în x_0 .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) ∞

AM 159 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (3x^2 - 6x) \sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (6x - 6) \sqrt[3]{x}$
b) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x^2}$
c) F nu este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$
d) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x}$
e) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x^2}$
f) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x}$

AM 160 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x|x-1|$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right|$
- b) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} |x - 1|$
- c) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x - 1|$
- d) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \left| \frac{x^2}{2} - x \right|$
- e) F nu poate fi primitivă a niciunei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1| + x$

AM 161 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

- a) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(2e^x + 1), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$
- b) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 1) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 - e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$
- c) $\int f(x) dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă
- d) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + e^x, & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$
- e) $\int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 + e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$
- f) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ (x - 1)(e^x + 2), & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

AM 162 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c) \operatorname{arctg} x$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

a) $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$

d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

AM 163 Să se calculeze

$$\int (x^2 - x) e^{-2x} dx.$$

a) $(2x - 1) e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

d) $(1 - 2x) e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\frac{2x^3}{3} + x^2\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 164 Să se calculeze

$$\int (2x - 1) \cos 2x dx.$$

a) $x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x \sin 2x + 2 (\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 165 Fie $I_n = \int \frac{e^x}{x^n} dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde n este un număr natural nenul. Care dintre următoarele relații este adevărată?

$$\text{a) } I_3 = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2}I_1$$

$$\text{b) } 3I_3 = \frac{e^x}{x^2} - I_1$$

$$\text{c) } I_3 = -\frac{e^x}{2x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}I_1$$

$$\text{d) } 2I_3 = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{3}I_2$$

$$\text{e) } I_3 = \frac{e^x}{3x^2} - \frac{2}{3}I_2$$

$$\text{f) } I_3 = \frac{e^x}{3x^3} - \frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{3}I_2$$

AM 166 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-6x+5}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

$$\text{a) } \frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } \frac{11}{4} \ln(5-x) - \frac{3}{4} \ln(1-x) + \mathcal{C}$$

$$\text{c) } \frac{11}{4} \ln \frac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$$

$$\text{d) } \frac{3}{4} \ln \frac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } \frac{7}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{7}{4} \ln|x-5| + \mathcal{C}$$

AM 167 Să se determine familia primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}, \quad a \in (0, \infty), \quad b \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{a) } F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

$$\text{c) } F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

$$\text{d) } F(x) = \frac{b}{a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } F(x) = \frac{1}{a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } F(x) = \frac{b}{2a} \ln(a^2x^2+b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$$

AM 168 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + (x-1)^2}.$$

Să se determine acea primitivă F a lui f pentru care $F(0) = \frac{\pi}{24}$.

a) $F(x) = \arctg(2x-1) + \frac{7\pi}{24}$ b) $F(x) = \arctg(2x-1) - \frac{5\pi}{24}$

c) $F(x) = \ln(2x-1) + \frac{5\pi}{24}$ d) $F(x) = \arctg(x-1) + \frac{7\pi}{12}$

e) $F(x) = \ln(x-1) + \frac{\pi}{4}$ f) $F(x) = \arctg(x^2+1) + \frac{5\pi}{24}$

AM 169 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x - 8 - x^2}{x^4 + 4x^3}.$$

Să se determine acea primitivă F a funcției f care verifică relația $F(5) = \frac{4}{25}$.

a) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{8}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x^3}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{8}{5} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$ d) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln \sqrt{\frac{x}{x+4}} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$ f) $\ln \sqrt{\frac{x}{\sqrt{x+4}}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 170 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f(x) = \frac{1}{x^{2018} + x}$ pe un interval $I \subset (0, \infty)$.

a) $\ln x - \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + C$ b) $\ln x + \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + C$

c) $\ln x + \ln(1+x^{2017}) \cdot 2017 + C$ d) $\ln x - \frac{\ln(x+x^{2018})}{2018} + C$

e) $-\ln x + \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + C$ f) $\frac{\ln x}{2018} - \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + C$

AM 171 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+10}}.$$

- a) $\frac{2}{7}\sqrt{x^2-6x+10} + \ln|x-3-\sqrt{x^2-6x+10}| + \mathcal{C}$
- b) $\frac{2}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-6x+10} + \mathcal{C}$
- c) $\frac{2(x-3)}{7}\ln\sqrt{x^2-6x+10} + \mathcal{C}$
- d) $\frac{2x}{7}\sqrt{x^2-6x+10} + \mathcal{C}$
- e) $2\sqrt{x^2-6x+10} + 7\ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+10}) + \mathcal{C}$
- f) $2\sqrt{x^2-6x+10} + 7\ln(x+\sqrt{x^2-6x+10}) + \mathcal{C}$

AM 172 Fie $I \subset (0, \infty)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- a) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- b) $3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- c) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- e) $2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- f) $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$

AM 173 Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^5 \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^2}.$$

Să se determine familia primitivelor funcției f .

- a) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^3}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
b) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
c) $\frac{1}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^3} + \mathcal{C}$
d) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
e) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
f) $\frac{5}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{3a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$

AM 174 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{e^x + e^{2-x}}.$$

- a) $\frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$
b) $2 \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$
c) $\frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$
d) $\frac{1}{e} \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$
e) $2 \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$
f) $\frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^x - \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$

AM 175 Fie funcțiile⁴ :

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{și respectiv} \quad \operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

⁴Funcția ch se numește *cosinus hiperbolic*, iar funcția sh se numește *sinus hiperbolic*

Să se determine primitiva F a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x$, care verifică relația $F(0) = 0$.

a) $\frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} - \frac{x}{8}$

b) $-\frac{x}{16} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x$

c) $\frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} + 2x$

d) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{ch} x$

e) $\frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$

f) $\frac{e^{4x}}{64} + \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} - \frac{5}{32}$

AM 176 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

a) $\ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$

c) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} + \mathcal{C}$

e) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \mathcal{C}$

f) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$

AM 177 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

a) $F(x) = \frac{x}{2} + \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = 2x + \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = x^2 + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

e) $F(x) = x + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

f) $F(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

AM 178 Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se definește

$$I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Care dintre următoarele relații este adevărată?

a) $I_9 = \frac{1}{8a^2} \left(-7I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$	b) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(-8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$
c) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$	d) $I_9 = \frac{1}{7a^2} \left(8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$
e) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 8I_7 \right)$	f) $I_9 = \frac{1}{8a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 7I_7 \right)$

AM 179 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se definește

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Să se exprime I_{2017} sub forma $I_{2017} = a x^{2016} \sqrt{1 + x^2} + b I_{2015}$, $a, b \in \mathbb{R}$ și să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată.

- | | |
|-----------------------|--|
| a) $a = b$ | b) $a - b = 1$ |
| c) $a \cdot b = 2016$ | d) $a = 2017b$ |
| e) $a + b = -2015$ | f) $\nexists a, b \in \mathbb{R}$ care să verifice relația |

AM 180 Fie $a \in (0, \infty)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad x \in (-a, a).$$

Atunci:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ 5I_5 = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2I_3 & \text{b)} \ 5I_5 = -x^4\sqrt{a^2 - x^2} + 4a^2I_3 \\ \text{c)} \ 5I_5 = 4x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2I_3 & \text{d)} \ I_5 = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 2a^2I_3 \\ \text{e)} \ I_5 = 4x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 5a^2I_3 & \text{f)} \ 4I_5 = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2I_3 \end{array}$$

AM 181 Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1 + 2 \ln x}{x(2 + \ln x)} dx.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ 3 \ln 2 + 3 \ln 3 + 2 & \text{b)} \ \ln \frac{9e^2}{32} & \text{c)} \ 6 + \ln \frac{9}{8e} \\ \text{d)} \ 2 \ln 2 + 3 \ln 3 + 1 & \text{e)} \ \ln \frac{8e^2}{27} & \text{f)} \ 4 - \ln \frac{3}{2e} \end{array}$$

AM 182 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x} \cos \pi x \, dx.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ \frac{3(1 + e^{-3})}{9 + \pi^2} & \text{b)} \ \frac{2(1 + e^2)}{4 + \pi^2} & \text{c)} \ \frac{1 + e^{-3}}{9 + \pi^2} \\ \text{d)} \ \frac{1 + e^3}{4 + \pi^2} & \text{e)} \ \frac{2(1 + e^3)}{9 + \pi^2} & \text{f)} \ \frac{3(1 + e^{-3})}{4 + \pi^2} \end{array}$$

AM 183 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x - x^3}{x^4 + 1} dx.$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8} & \text{b)} \ \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4} & \text{c)} \ \pi - 2 \ln 2 \\ \text{d)} \ 2\pi - 4 \ln 2 & \text{e)} \ \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2} & \text{f)} \ \frac{\pi}{6} - \frac{\ln 2}{3} \end{array}$$

AM 184 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 4} dx.$

- a) $\frac{\operatorname{arctg} 3 - \ln 5}{8}$ b) $\frac{\operatorname{arctg} 2 - \ln 2}{4}$ c) $\frac{2\operatorname{arctg} 3 - \ln 2}{4}$
d) $\frac{2\operatorname{arctg} 2 - \ln 5}{8}$ e) $\frac{\operatorname{arctg} 4 - \ln 3}{8}$ f) $\frac{2\operatorname{arctg} 4 - \ln 3}{4}$

AM 185 Să se calculeze $\int_1^e (2x + 1) \ln x \, dx$.

- a) $\frac{1}{2}(e + 3)$ b) $\frac{1}{3}(e^2 + 2)$ c) $\frac{1}{2}(e^2 + 3)$
d) $\frac{1}{2}(e^2 - 2)$ e) $\frac{1}{3}(e - 3)$ f) $\frac{1}{3}(e^2 + 1)$

AM 186 Să se calculeze $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$.

- a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

AM 187 Să se calculeze $\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}$.

- a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$ c) $\ln \frac{9}{2}$ d) $\ln \frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 188 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{3+x^2}, & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \end{cases}$.

Să se calculeze $F(1) - F(0)$, unde $F(x) = \int_{-e}^x f(t) dt$.

- a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\frac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 189 Să se calculeze $\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx$.

a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$

b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$

d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$

e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

f) $\ln \frac{34}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$

AM 190 Să se calculeze $\int_{-1}^1 |x| \arcsin x dx$.

a) $-\frac{\pi}{2}$

b) -1

c) 1

d) $\frac{\pi}{2}$

e) 0

f) π

AM 191 Să se calculeze $\int_{-1}^1 |x| \arcsin^2 x dx$.

a) $\frac{\pi}{8}$

b) $\frac{\pi^2}{8}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

e) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

f) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

AM 192 Să se determine valoarea parametrului $a \in (0, \infty)$ pentru care

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{1 + e^x} dx = 20000.$$

a) 4

b) $\frac{1}{2}$

c) e

d) 1

e) 10

f) 100

AM 193 Să se calculeze $\int_0^{1024} \frac{\ln(2017 - x)}{\ln[1505^2 - (512 - x)^2]} dx$.

a) 2017

b) $993 \cdot 2017$

c) $1024 \cdot 2017$

d) 512

e) $\frac{993 \cdot 2017}{2}$

f) $993 \cdot 1024$

AM 194 Să se calculeze $\int_1^3 x[x]dx$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 195 Fie $m \in (0, \infty)$ și funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [mx]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Să se determine constanta m pentru care $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 196 Să se studieze dacă există $a \in (0, \infty)$ pentru care $\int_{-a}^a [x] dx = -82$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x . În caz afirmativ, să se precizeze valoarea parametrului a .

- a) nu există b) 40 c) 41 d) 81 e) 82 f) 164

AM 197 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^3 (x + |m - x|) dx = 9.$$

- a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1, 3\}$

AM 198 Să se calculeze $\int_{-2}^1 (1 - |x|) dx$.

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2 f) 0

AM 199 Să se calculeze

$$\int_{-2}^2 \left(1 - \left||x| - 1\right|\right) dx.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 200 Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \sin x, \frac{1}{2} \right\} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}$
 d) $\frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3} + 1$

AM 201 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \min \{ \sin x, \cos x \} dx.$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 202 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} + 1$
 d) $\frac{\pi}{8} + 1$ e) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi - 1}{4}$

AM 203 Să se calculeze

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

a) $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$

b) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 3}{648}$

c) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{648}$

d) $\frac{\pi + 3}{648}$

e) $\frac{6\sqrt{3} - 3}{648}$

f) $\frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{324}$

AM 204 Se consideră funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 7}.$$

Să se calculeze $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y) dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcției f .

a) $1 + \ln \frac{8}{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $1 + \ln \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{7}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1 + \ln \frac{8}{7}$

d) $-1 - \ln \frac{8}{7} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2 + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

f) 0

AM 205 Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ se consideră

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}.$$

Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$.

a) 0

b) ∞

c) 2

d) $\ln 3$

e) 1

f) $\frac{1}{2}$

AM 206 Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx .$$

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$

b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$

c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3} \ln \frac{2}{9}$

e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7} \ln \frac{9}{2}$

f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4} \ln \frac{9}{2}$

AM 207 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \cos^2 x} dx .$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12}$

f) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18}$

AM 208 Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + e^{ax}} dx .$$

a) $2a$

b) $\frac{a\pi}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) $e^{a\pi}$

f) $2e^a$

AM 209 Să se determine constanta reală a pentru care

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x \cos x} dx = \ln \sqrt[4]{3} .$$

a) 2

b) 1

c) π

d) $\sqrt{3}$

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{3}$

AM 210 Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} dx$.

a) $\frac{2\sqrt{3} + \pi}{6}$

b) $\frac{6\sqrt{3} - \pi}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{3} + \pi}{6}$

d) $\frac{5\sqrt{3} - \pi}{3}$

e) $\frac{4\sqrt{3} - \pi}{6}$

f) $\frac{5\sqrt{3} + \pi}{2}$

AM 211 Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \sin 2x \, dx.$$

- a) 0 b) $-\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $-\frac{1}{5}$ f) 1

AM 212 Să se determine valoarea parametrului $a \in (1, \infty)$ așa încât

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + \cos 2x} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{8}{3}$ f) 4

AM 213 Fie șirul de integrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $nI(n)I(n-1)$ pentru toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) $\frac{n\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2(n-1)!}$ c) π d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{n\pi}{n+1}$ f) $\frac{\pi(n+1)}{4}$

AM 214 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad |x| < 1 \\ n (\operatorname{sign} x)^{n+1} & , \quad |x| = 1 \end{cases},$$

unde sign reprezintă funcția semn. Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$.

- a) $\frac{1}{n}$ b) $\cos \frac{\pi}{n}$ c) $\frac{1 + (-1)^n}{n}$
 d) $\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}$ f) 0

AM 215 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{1 + e^{-x}} dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x}{1 - e^{-x}} dx.$$

- a) $\ln 2 \ln 3$ b) $\ln 2 + 4 \ln 3$ c) $\ln 2 + \ln 3$
 d) $2 \ln 2 \ln 3$ e) $3 \ln 2 + 2 \ln 3$ f) $\ln 2 + 2 \ln 3$

AM 216 Să se determine numărul real m pentru care are loc egalitatea

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} dx = m \int_1^2 (x - 1)^2 \sqrt{x} dx.$$

- a) 3, 5 b) 2 c) 3 d) 1, 5 e) 1 f) 2, 5

AM 217 Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x^2 + x + 1} dx, \text{ pentru orice } a \in (1, \infty).$$

- a) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) 1

AM 218 Să se calculeze

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4 e) ∞ f) $\frac{1}{4}$

AM 219 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_0^{\cos x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{ctg} x} \ln(t^2 + 2) dt}.$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 220 Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt$. Atunci:

- a) F este crescătoare b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$
c) F este funcție pară d) F este descrescătoare
e) $F(1) = 0$ f) răspunsurile precedente sunt false

AM 221 Să se calculeze $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(101x) \cdot \sin^{99} x \, dx$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{100 \cdot 2^{101}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{101 \cdot 2^{100}}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{100 \cdot 2^{101}}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{101 \cdot 2^{100}}$ e) $\frac{1}{2^{101}}$ f) $\frac{1}{10100}$

AM 222 Se consideră funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(2x) = 3f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă

$$\int_0^1 f(x) dx = 1,$$

să se calculeze

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AM 223 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right).$

- a) 1 b) 0 c) $\sqrt{2}$
 d) $2\sqrt{2} - 2$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 224 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{\pi}{3n} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3n} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n} \right) + \cdots + \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3n} \right) \right].$$

- a) π b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{\pi} \ln 3$ f) $\ln 2$

AM 225 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\frac{\pi}{6}$

AM 226 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3(n+k) - 2}.$$

- a) $\frac{3}{2}$ b) $2 + \ln 3$ c) $\frac{1}{2} \ln 3$ d) $\frac{2}{3} \ln 2$ e) $\frac{1}{3} \ln 2$ f) ∞

AM 227 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{e}{2}$ e) e f) ∞

AM 228 Fie $a \in (0, \infty)$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^1 x^n e^{-ax^2} dx$.

- a) e^a b) e^{-a} c) $1 + ae^2$ d) e^{-2a} e) e^{2a} f) $1 - ae^2$

AM 229 Un mobil pornește de pe loc și se deplasează în linie dreaptă timp de T minute, $T > 1$, număr întreg, cu viteza

$$v(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq 60 \\ 60 + \frac{1}{\pi} \sin \pi(t - 60) & , \quad 60 < t \leq 60T \end{cases}$$

măsurată în metri/secundă. Să se calculeze a_1 , accelerația atinsă de mobil la un minut de la pornire, și d , distanța parcursă în cele T minute.

- a) $a_1 = 60T \text{ m/s}^2$ și $d = 1740 - T \text{ m}$
b) $a_1 = 2T \text{ m/s}^2$ și $d = 1740 + 60T \text{ m}$
c) $a_1 = 60T \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 - T \text{ m}$
d) $a_1 = 2T \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 + 60T \text{ m}$
e) $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ și $d = 1800(2T - 1) \text{ m}$
f) $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 + 60T \text{ m}$

AM 230 Variația sumei depuse într-un cont bancar de-a lungul unui deceniu este descrisă de funcția⁵ $S : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S(t) = 2000 - 10t \cdot \exp\left(5 - \frac{t^2}{8}\right).$$

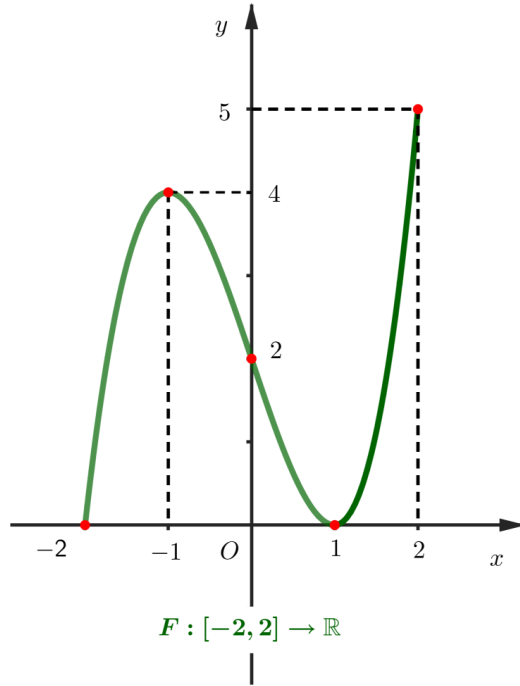
Să se stabilească la câți ani (notație: $t_{\min}$) de la inițierea contului depozitul atinge valoarea minimă $S_{\min}$ și care sunt valorile $S_{\min}$ și respectiv S_{md} , unde S_{md} este valoarea medie a funcției S în acest interval de timp.

- a) $t_{\min} = 3 \text{ ani}$, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

⁵Notația $\exp$ este folosită adesea pentru funcția exponențială cu baza e (baza logaritmului natural); prin urmare funcția $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $\exp(x) = e^x$.

- b) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 1800$
 c) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 1800 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 2000$
 d) $t_{\min} = 5$ ani, $S_{\min} = 1800 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 1800$
 e) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$
 f) Toate răspunsurile precedente sunt greșite

AM 231 Graficul unei primitive F a unei funcții continue $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ este dat mai jos.



Câte dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- (i) $F'(1) = f(1)$ (ii) $f(1) = F(1)$ (iii) $\int_0^2 f(x)dx = 3$
 (iv) $f(F(-2)) > 0$ (v) $f(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 232 Să se determine aria subgraficului funcției

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

a) $\ln \frac{16}{9}$

b) $2 - \ln \frac{16}{9}$

c) $1 - \ln \frac{16}{9}$

d) $\ln \frac{9}{16}$

e) $1 - \ln \frac{9}{16}$

f) 2

AM 233 Să se determine aria mulțimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 3} \quad \text{și} \quad y = 2.$$

a) $12 - 3 \ln 3$

b) $12 + 3 \ln 3$

c) $16 - 3 \ln 3$

d) $16 - 12 \ln 3$

e) $16 - \ln 12$

f) $\ln 12$

AM 234 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele

$$y = 2x^2 + 5x - 3 \quad \text{și} \quad y = 6 - x - x^2.$$

a) 2^5

b) 12

c) 2^4

d) 60

e) 2^6

f) 34

AM 235 Să se determine aria domeniului mărginit delimitat de parabola $y^2 = 10x$ și dreapta $y = 5x$.

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

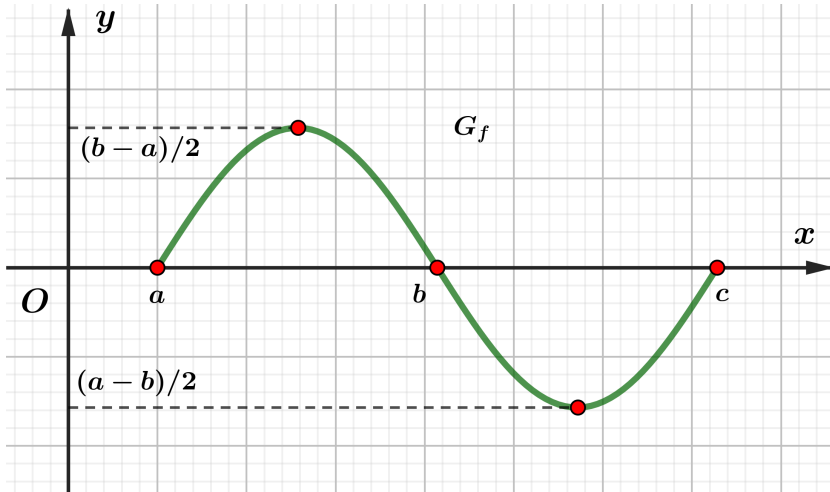
c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{2}{15}$

e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{5}$

AM 236 Graficul unei funcții de două ori derivabile $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat mai jos.



Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate ?

A_1 : Există o funcție constantă $g : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât aria subgraficului lui g să coincidă cu aria subgraficului lui $f|_{[a,b]}$

A_2 : Există cel mult un punct $x_0 \in (a, c)$ cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$

$$A_3: \int_a^c f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx$$

A_4 : Punctul $x_0 = b$ este punct de inflexiune pentru f

A_5 : Funcția $f : [a, c] \rightarrow \left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2} \right]$ este surjectivă

$$A_6: \int_a^c |f(x)| dx > \frac{(b-a)^2}{2}$$

a) A_1, A_4, A_5 și A_6

b) A_3 și A_5

c) A_1, A_3, A_4 și A_5

d) toate

e) A_2 și A_4

f) A_3, A_5 și A_6

AM 237 Să se determine volumul corpului de rotație generat de graficul funcției

$$f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}.$$

- | | |
|--|--|
| a) $\pi \left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$ | b) $\pi \left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$ |
| c) $\pi \left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$ | d) $\pi \left(\ln \frac{3}{4} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$ |
| e) $\pi \left(3\sqrt{7} + \ln \frac{3}{4} \right)$ | f) $\pi \left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \frac{5}{6} \right)$ |

AM 238 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției

$$f : \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cos x.$$

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| a) $\frac{4\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{2}$ | b) $\frac{1}{16}\pi^2(3\pi^2 + 2)$ | c) $\frac{\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{4}$ |
| d) $\frac{9\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{8}$ | e) $\frac{3}{8}\pi^2(\pi^2 - 2)$ | f) $\frac{8\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{8}$ |

AM 239 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a cercului de ecuație $x^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$.

- | | | | | | |
|-----------|-------------|----------|------------|-----------|-------------|
| a) 2π | b) $2\pi^2$ | c) π | d) π^2 | e) 4π | f) $4\pi^2$ |
|-----------|-------------|----------|------------|-----------|-------------|

AM 240 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a elipsei de ecuație $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

- | | | | | | |
|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|
| a) 12π | b) 10π | c) 16π | d) $12\pi^2$ | e) $10\pi^2$ | f) $16\pi^2$ |
|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|

AM 241 Să se determine parametrul real m așa încât volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \left(x - \frac{m}{x} \right),$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

- a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 242 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției

$$f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

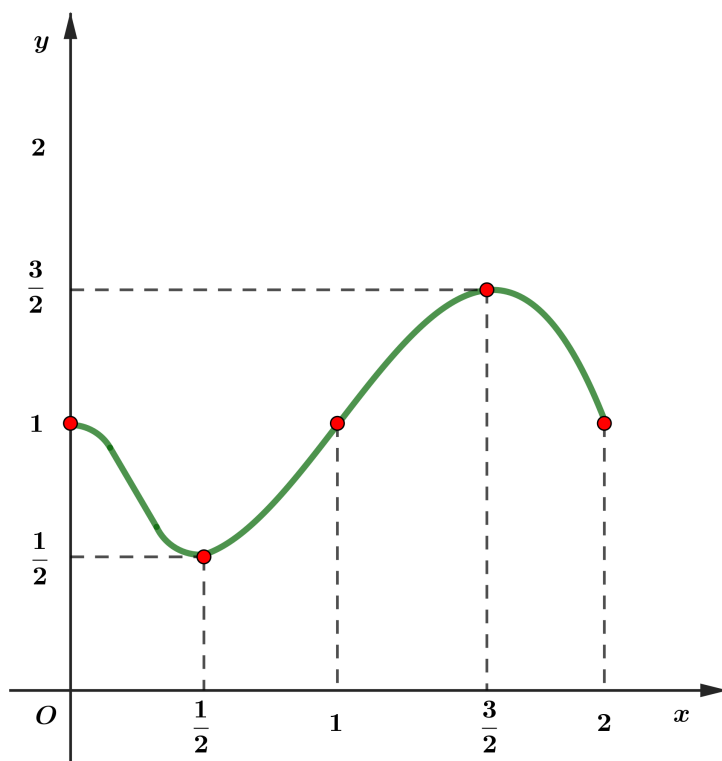
- a) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi \ln \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$
 d) $\frac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi \ln \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi \ln \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

AM 243 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției

$$f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

- a) $\pi \ln \frac{5}{13}$ b) $3\pi \ln \frac{13e}{5}$ c) $\pi \ln \frac{5}{13}$
 d) $3\pi \ln \frac{5e}{13}$ e) $2\pi \ln \frac{13}{5e}$ f) $2\pi \ln \frac{5e}{13}$

AM 244 Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă de două ori, al cărei grafic este dat în figura de mai jos. Tangenta la graficul acestei funcții în punctul de inflexiune $(1, 1)$ trece prin punctul de coordonate $(2, \frac{5}{2})$. Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?



$$A_1: 1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3$$

$$A_2: \int_0^2 f^2(x) dx \geq \frac{71}{40}$$

$$A_3: \int_0^2 \sqrt{f(x)} dx \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$A_4: 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2} \quad (\forall) x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$A_5: f'(x) \geq 0 \quad (\forall) x \in [0, 2]$$

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

f) 0

ANEXE

Subiectele date la admitere
în ultimii ani
cu rezolvările integrale

1.(8p) Fie ecuația $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x+7} = 3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuației.

- a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E = \sum_{i=1}^{2014} \left[\left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k!(k^2 + 1) \right].$$

- a) 2014! b) 2014! - 1 c) 2015! d) 2015! - 2 e) 2016! - 2

3.(8p) Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{dacă } i = j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & \text{dacă } i < j, \\ 0, & \text{dacă } i > j, \end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinări de j luate câte i . Să se calculeze A^{-1} .

- a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul $(\mathcal{M}, \cdot)$, unde

$$\mathcal{M} = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

și " $\cdot$ " este operația de înmulțire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\frac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

6.(9p) Știind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A și B . Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcția $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$
d) nu există e) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1, y = \frac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = -1$
- b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 2$
- c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 1$
- d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
- e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcția să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

- a) -2
- b) 1
- c) -1
- d) 3
- e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^0 |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

- a) $\frac{435}{96}$
- b) $\frac{135}{32}$
- c) $\frac{221}{48}$
- d) $\frac{37}{96}$
- e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculați aria cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$
- b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$
- c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$
- d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$
- e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUȚII AC+ETC 2014

1. Punem condiția de existență $x + 7 \geq 0$ și obținem $x \in [-7, +\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x} = u$ și $\sqrt{x+7} = v$ și atunci avem $2-x = u^3$ și $x+7 = v^2$, de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

cu soluțiile $u_1 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = 2$, $v_2 = 1$, $u_3 = -3$ și $v_3 = 6$, adică $x_1 = 2$, $x_2 = -6$ și $x_3 = 29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuației este

$$|2| + |-6| + |29| = 37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k![(k+1)^2 - 2(k+1) + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i [k!(k+1)(k+1) - 2k!(k+1) + 2k!] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+1)] - 2 \sum_{k=1}^i [(k+1)! - k!] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+2-1)] - 2[(i+1)! - 1] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} \left[\sum_{k=1}^i [(k+2)! - (k+1)!] - 2(i+1)! + 2 \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+2)! - 2 - 2(i+1)! + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+1)!(i+2) - 2(i+1)!] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2014} \left[\frac{1+i}{i} (i+1)! i \right] = \sum_{i=1}^{2014} [(1+i)(i+1)!] = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} [(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014} [(2+i)! - (i+1)!] = \\
&= 2016! - 2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (-1)^{1+1} = 1, & a_{22} &= (-1)^{2+2} = 1, & a_{33} &= (-1)^{3+3} = 1, \\
a_{12} &= (-1)^{1+2} C_2^1 = -2, & a_{13} &= (-1)^{1+3} C_3^1 = 3, & a_{23} &= (-1)^{2+3} C_3^2 = -3, \\
a_{21} &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0,
\end{aligned}$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulțirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărțirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărțirii, adică

$$(x - 2015)^{2014} + x - 2001 = (x - 2014)(x - 2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ și $x = 2016$, ecuația precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluția $a = 1$ și $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relația din enunț este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde } \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obținem că $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ este singura soluție.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 2)$. Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Leftrightarrow 3 = \frac{1 + 0 + x_C}{3} \Leftrightarrow x_C = 8$$

și

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{0 + 2 + y_C}{3} \Leftrightarrow y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcția f nu are asimptote orizontale.

În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}$$

și

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2} x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\arctg x \mp \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1+x^2}{1} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$.

Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2 + 1) - (ax + a - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2ax + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-ax^2 + (4 - 2a)x + a}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuația $4 - 2a = 0$ cu soluția reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2 - 11x - 3| = \begin{cases} 4x^2 - 11x - 3, & \text{dacă } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup [3, \infty) \\ -4x^2 + 11x + 3, & \text{dacă } x \in \left(-\frac{1}{4}, 3\right), \end{cases}$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x^2 - 11x - 3) dx + \int_{-\frac{1}{4}}^0 (-4x^2 + 11x + 3) dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-\frac{1}{4}}^0 = \frac{221}{48}.$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părți de două ori, obținem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015

A

1.(7p) Fie ecuația $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuației.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma elementelor mulțimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

- a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulțimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2 \text{ și } \left[\frac{1}{|z - 3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

- a) $P \subset \left(4, \frac{\sqrt{70}}{2} \right]$ b) $P = \left(4, \frac{35}{8} \right)$ c) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$
d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \frac{\sqrt{75}}{2} \right)$

4.(8p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ și restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 3.

- a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA și OB două raze perpendiculare în cercul de centru O și rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA)$, $P \in (OB)$, iar M și N aparțin arcului mic AB .

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1, 2)$ față de punctul $B(3, 4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P . Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

- a) $-3, 1$ b) $\frac{6}{5}, \frac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ e) $1, \frac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)).$$

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ și de dreapta $2x - 3y = 9$.

- a) 9 b) $\frac{9}{2}$ c) 18 d) $\frac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea absciselor punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1.

- a) $2y - x + 1 = 0$ b) $y - x - 1 = 0$ c) $y + x = 0$
 d) $y - x + 1 = 0$ e) $y - 2x + 1 = 0$

SOLUȚII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = v$ și eliminând x din cele două relații, se obține:

$$u + v = 3, u^3 + v^3 = 9,$$

cu soluțiile $u = 2, v = 1$ și $u = 1, v = 2$. Rezultă $x = 49$ sau $x = 0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{C_{k+1}^2}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

Rămâne de rezolvat în $\mathbb{N}$ inecuația:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{3n} \leq \frac{2}{3},$$

deci $n \in \{2, 3, 4\}$.

Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Din condiția $|z - 2| = 2$ se obține $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relație, $1 \leq \frac{1}{|z - 3|} < 2$ rezultă $\frac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \frac{35}{8}\right)$. Ținând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluție $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui $\bar{A}$ trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică ușor că pentru $m = 1$ avem $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ și aplicând apoi Teorema împărțirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informații, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ și împărțindu-l la $X^2 + 2$ se obține restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie să coincidă cu $X + 1$. Se obțin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ și $[OP]$, cu C proiecția punctului O pe latura PQ și cu D proiecția punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obține că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1, 2)$ față de $B(3, 4)$, se obține imediat că $C(5, 6)$. Fie $P(p, 0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p + 2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obține $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1) \ln y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y-1) \cdot \ln \frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0 \cdot \infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt și aplicăm apoi de două ori Regula lui l' Hospital:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{y-1}{y}}{\ln(y-1)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obține:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx &= \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-(x-2)^2} \Big|_1^2 + \arcsin(x-2) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecție ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ și $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeței determinate de parabolă și dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x - 9}{3} + \sqrt{9 - 2x} \right) dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x \Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9 - 2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Știind că mulțimea punctelor de extrem local ale unei funcții se găsesc printre soluțiile primei derivate, rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$. Se obțin soluțiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcției f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcției f .

Răspuns corect: d).

12. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 26.07.2016

A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m , respectiv valoarea maximă M , a funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a) $m = -\frac{1}{4}, M = 0$ b) $m = 0, M = 42$ c) $m = -42, M = 0$

d) $m = 0, M = 2$ e) $m = -\frac{1}{4}, M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + \dots + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}.$$

a) $S = 0$ b) $S = \frac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \frac{1}{6}$ e) $S = \frac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei X .

a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a și b astfel încât legea de compoziție

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicația $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$.

a) $a = -12, b = 3$ b) $a = 3, b = 12$ c) $a = 12, b = 3$
d) $a = 12, b = -3$ e) $a = 3, b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

- a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m + 3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

- a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ și $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparține bisectoarei unghiului AOB .

- a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

- a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulțimii $\mathbb{R}$ prin f .

- a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) $\mathbb{R}$

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1 + \sqrt{\ln x})^3} dx.$$

- a) $\frac{5}{4} - 2 \ln 2$ b) $2 \ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2 \ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}},$$

axa Ox și dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

- a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{5}+1)}{4}$
 b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)(\sqrt{13}-3)}{4}$
 c) $13\sqrt{5} - 4 \ln (3 + 2\sqrt{2})$
 d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)(\sqrt{13}-3)}{4}$
 e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2 \ln \frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)(\sqrt{13}-3)}{4}$

SOLUȚII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcției $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimul funcției pe intervalul $[1, 3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2^2 + \dots + \log_2 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2^2 + \dots + \log_3 2016^2} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2^2 + \dots + \log_{2016} 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{\log_2 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \log_{1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2016 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ecuația devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se obțin relațiile $2a - 4b + c = 1$, $b = 2$, $5a - 12b + 3c = 3$ de unde $a = 0$, $b = 2$, $c = 9$, deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiția ca legea de compoziție să fie asociativă se obține $a = 12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiția morfismului între două grupuri, $f(x + y) = f(x) \star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x + y) = e^{x+y} + b$$

și

$$f(x) \star f(y) = e^{x+y} + (b-3)e^x + (b-3)e^y + b^2 - 4b + 12.$$

Egalând cele două expresii, se obține $(b-3)(e^x + e^y + b + 4) = 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $b = 3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienților polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărțind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obține câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuația dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuația devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

și are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \frac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0, 1]$, rămâne ca și a doua rădăcină să fie în afara aceluiași interval, adică $\frac{m-1}{2} < 0$ și $\frac{m-1}{2} > 1$. Se obține $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanțe egale de laturile unghiului, punem condiția $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuațiile dreptelor $OA : y = -2x$ și $OB : y = 3x$, deci distanțele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|4+a|}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|6-a|}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obține $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0 , deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține:

$$\lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{x^2}} = e^{-\lim_{x \searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluția ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiție sunt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variație al funcției, se obține că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituția $\ln x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1 + \sqrt{t})^3} dt = 2 \int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^3} dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = ds$ și se obține:

$$2 \int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3} ds = 2 \left(\int_1^2 \frac{1}{s} ds - 2 \int_1^2 \frac{1}{s^2} ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3} ds \right) = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcția f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ și negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} dx \\ &= 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4} \Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4} \Big|_2^3 - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_2^3 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 25.07.2017

A

1.(9p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$x^2 - 2a(x - 1) - x(a + 1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

- a) $9a^2 + 1$ b) $9a^2 - 12a$ c) $9a^2 - 1$ d) $9a^2$ e) $9a^2 - 3a + 12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}.$$

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$
 c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$
 e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulțimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6(x + y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluțiilor ecuației $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

- a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) $X - 1$ b) X c) $X + 1$ d) $-X + 1$ e) $-X - 1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{ABC}$ au măsurile de 30° , respectiv 135° , iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

- a) $\frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3} - 1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecție a dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se calculeze raportul dintre distanța de la P la d_1 și distanța de la P la d_2 .

- a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

- a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) $\emptyset$

11.(8p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{e^x + 1} dx = -\frac{32}{5}.$$

- a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

- a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuația din enunț este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ și $x_1 x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1} = C_{80}^k (\sqrt[3]{5})^{80-k} (\sqrt[5]{2})^k = C_{80}^k 5^{\frac{80-k}{3}} 2^{\frac{k}{5}}, \quad k \in \overline{0, 80},$$

el este număr rațional dacă și numai dacă sunt satisfăcute simultan condițiile:

$$\frac{80-k}{3} \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad \frac{k}{5} \in \mathbb{N},$$

adică $k \in \{5, 20, 35, 50, 65, 80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operații cu coloane și linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3:=C_3-C_1]{C_2:=C_2-C_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & -4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & -4c+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3:=C_3+2C_2} \\ &= 6 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3:=L_3-L_1]{L_2:=L_2-L_1} 6 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 12(b-a)(c-a)(b-c). \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuația din enunț este echivalentă cu $2(2^x + 2^{-x}) = 5$, care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, deci produsul lor este -1 .

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la $X^2 - X + 1$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(2x^3 + x + 1)^{2017} = (x^2 - x + 1) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$. Atunci $\omega^3 = -1$ și $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, adică $\omega^2 = \omega - 1$ și înlocuind pe x cu ω în relația de mai sus se obține

$$(\omega - 1)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow (\omega^2)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow \omega^2 = a\omega + b,$$

de unde rezultă că $a = 1$ și $b = -1$, deci restul căutat este $X - 1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obține că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \Leftrightarrow AC = 3\sqrt{2}.$$

Cum $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ și

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB}) = 9(2 - \sqrt{3}) = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 , atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte și obținem $A(2, 0)$, iar ecuația dreptei d este $y = x - 2$.

Fie $P(p, p - 2) \in d$, $p \neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P, d_1)}{d(P, d_2)} = \frac{\frac{2|p - 2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p - 2|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcția f poate fi scrisă

$$f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = 3x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

și atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{x}} e^2 \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ și $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, rezultă că $f''(-1) = 7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcția f devine

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ \sqrt{-x^2 + 4x}, & \text{dacă } x \in (0, 4), \end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{2\sqrt{x^2 - 4x}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \frac{-x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 4x}}, & \text{dacă } x \in (0, 4). \end{cases}$$

Din tabloul de variație al funcției se observă că punctele de extrem ale funcției sunt $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunț cu I și făcând schimbarea de variabilă $-x = t$ obținem

$$I = \int_a^{-a} -\frac{t^4}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 e^t}{e^t + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 (e^t + 1 - 1)}{e^t + 1} dt =$$

$$= \int_{-a}^a \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t + 1} \right) dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-a}^a - I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluția ecuației $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx = \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx \right] = \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2017

A

1.(8p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

- a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ și rația $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5 .

- a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017} .

- a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

- a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că -1 este rădăcină a polinomului f și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

- a) $a = 1, b = -1$ b) $a = 1, b = 4$ c) $a = 2, b = 4$
d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -4, b = 1$

6.(8p) Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

- a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparține dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $P(-1, 1)$ și este paralelă cu dreapta d .

- a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$
 d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

- a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

- a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$
 d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\emptyset$

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{8} - \frac{3}{e^2}$ b) $\frac{e^2}{16} - \frac{7}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{7}{4e^2}$
 d) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

- a) $\frac{4}{3} \ln(x+5) - \frac{1}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- b) $\frac{1}{3} \ln(x+5) - \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- c) $\frac{4}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- d) $\frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{4}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- e) $\frac{1}{2} \ln(x+5) + \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2 - 11x + 6 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuația din enunț este echivalentă cu $6x^2 - 11x + 5 = 0$ și atunci suma soluțiilor ei este $\frac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5 = a_1 + 4r = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A = 0$, rezultă că $\det(A^{2017}) = (\det A)^{2017} = 0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = -14$, $y = -21$ și $z = 24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condițiile $f(-1) = 0$ și $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluția $a = 1$ și $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \frac{4}{5}$, de unde se obține că $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparține dreptei d se obține că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 și prin urmare, ecuația ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obține $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2 - 1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcției f .

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx &= \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+5} dx = -\frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln(x+5) + C. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 23.07.2018

A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi și rația 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{2017} + a_{2018}}{a_{2018} + a_{2019}},$$

atunci:

$$\text{a) } S = 1 \quad \text{b) } S = 2017 \quad \text{c) } S = \frac{2017}{2018} \quad \text{d) } S = 2018 \quad \text{e) } S = \frac{2018}{2017}$$

2.(8p) Fie mulțimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = 2 \text{ și } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

- a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$
 d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

- a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0
 c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$
 e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

- a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$
 d) $\emptyset$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2018)^{2017} + X - 2020 \text{ și } g = (X - 2017)(X - 2019).$$

Să se determine restul împărțirii lui f la g .

- a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$
d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ și $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză și celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

- a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\frac{6\sqrt{3} - 5}{2}$
d) $\frac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(4, 3)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii triunghiului ABC dusă din A . Să se calculeze $m \cdot n$.

- a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

- a) $\mathbb{R}$ b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

9.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

- a) $a = 1, b = 1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = 2, b = 1$
 d) $a = -2, b = -1$ e) $a = 1, b = -1$

10.(7p) Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiție a funcției. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3}.$$

- a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

- a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$.

- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \cdots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1r(1+r)} + \frac{a_1r(1+r)}{a_1r^2(1+r)} + \cdots + \frac{a_1r^{2016}(1+r)}{a_1r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018}.$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relația $z \cdot \bar{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \quad (1)$$

Pe de altă parte, relația $\left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1$ poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \left(\frac{2z+3}{z-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i} \right)} &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right)} = 1 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i} \right) &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2a+3)^2 + 4b^2}{a^2 + (b-3)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad b &= -2a - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2), se obțin două soluții:

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = -\frac{7}{5}, \quad \text{de unde} \quad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

și

$$a_2 = -1, \quad b_2 = 1, \quad \text{de unde} \quad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2 := C_2 - C_3 \\ &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ și determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\text{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -\frac{1}{10}.$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărțirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(x - 2018)^{2017} + x - 2020 = (x - 2017)(x - 2019) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii. Înlocuind în această relație pe x cu 2017, respectiv 2019, se obțin relațiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ și $b = -4038$, adică restul împărțirii lui f la g este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x .

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu $m(\widehat{BGD}) = 90^\circ$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \Leftrightarrow BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu $m(\widehat{EFC}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{FCE}) = 60^\circ$, avem

$$\operatorname{tg}(\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \Leftrightarrow FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FC$, adică $\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obține $x = \frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\frac{2}{3}$, rezultă că panta înălțimii căutate este $-\frac{3}{2}$, iar ecuația ei este $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcția f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că $Im f = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obține că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{9x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9x^2 \cos^2 x} \left(1 - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{9x^2 \cos^2 x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{9 \cos^2 x} = -\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1} = t$, rezultă că $x = t^2 + 1$ și integrala din enunț devine

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeței căutate poate fi scrisă

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = 4\sqrt{2} - 2.$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 17.09.2018

A

1.(8p) Să se găsească soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{1-x-2x^2} = -x-1.$$

- a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 și 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

- a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

- a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

- a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația

$$x * x = -2.$$

- a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 .

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$
d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) $\mathbb{R}^*$ e) $[0, +\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{4}$

12.(8p) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x,$$

axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e^2$.

a) $\frac{15e^4 - 7}{2}$

b) $10e^2 - \frac{7}{2}$

c) $\frac{15e^2 - 1}{2}$

d) $10e^4 - \frac{7}{2}$

e) $\frac{7e^4 - 15}{2}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condițiile de existență în ecuația dată se obține

$$\begin{cases} 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ x \in (-\infty, -1] \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

care este soluție a ecuației.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\frac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned} B - \frac{1}{2}(A + A^t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 9 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9^3 + 4^3 - 36 - 36 - 36 = 2 \cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuația din enunț poate fi scrisă $x^2 + 4x + 2 = -2$, care are soluția $x = -2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -2 \cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obține $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1, 4)$ și ecuația mediane din A este $y = 5 - x$, de unde rezultă că $m = -1$ și $n = 5$. Deci, $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} - 1 \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2x + 6}} \right]^{\frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 1}} = e^2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \frac{-mx^2 - 2x + m}{(x^2 + 1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă și numai dacă discriminantul ecuației $-mx^2 - 2x + m = 0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4 + 4m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părți, integrala din enunț devine

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x \cos x)^2 dx &= \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcția f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \, dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \, dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

Pentru prima integrala se folosește Formula de integrare prin părți, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x} dx = du$ și atunci se obține

$$\begin{aligned} A &= 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx - 3 \int_0^2 u \, du = \\ &= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2}\right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2019

A

1.(8p) Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{și} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulțimea valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete și 6 sunt băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți?

- a) 50 b) 6300 c) 240
d) 1050 e) 525

3.(10p) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ și

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - 2a - 4 & ac - 2a & a^2 - b^2 - 2c \\ b^2 + ab - 2a - 4 & a^2 - c^2 - 2b & ab - 2a \\ b^2c + 2bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

- a) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) 2, 1
e) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

4.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{și} \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

- a) $a = b = 1$ b) $a = b = \frac{1}{2}$ c) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$
d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 0$, $b = 1$

5.(8p) Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul

$$(X + 1)^{17} + mX^2 + n$$

să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

- a) $m = 0$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 0$ c) $m = -1$, $n = -1$
d) $m = 1$, $n = 0$ e) $m = 1$, $n = 1$

6.(9p) Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin \hat{C}$.

- a) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1, -1)$, $B(-2, 3)$ și $C(4, 0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui față de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

- a) $(1, 2)$ b) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ c) $\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$ d) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1}.$$

- a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real și pozitiv cu proprietatea că diferența dintre dublul său și cubul său este maximă.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right)$ b) $\pi \left(2 + \ln \frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi \left(1 - \ln \frac{13}{5}\right)$

d) $2\pi \ln \frac{13}{5}$ e) $\pi \left(2 - \ln \frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx .$$

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluțiile ecuației $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt a și 2 , iar soluția ecuației $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulțimea $A \cap B$ are un singur element dacă și numai dacă

$$2a = a \iff a = 0$$

sau

$$2a = 2 \iff a = 1 .$$

În concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieți se poate forma o grupă de câte 2 băieți în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relația

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obținem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}.$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ și $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ și, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(i) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(ii) f satisface simultan condițiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \Rightarrow b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \Rightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

În concluzie, $a = \frac{1}{2}$ și $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Atunci $\omega^3 = 1$ și $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Cum polinomul $(X + 1)^{17} + mX^2 + n$ se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$ se obține că

$$(\omega + 1)^{17} + m\omega^2 + n = 0 \Leftrightarrow (-\omega^2)^{17} + m(-1 - \omega) + n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(1 + m)\omega - m + n = 0,$$

de unde $m = n = -1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

și atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A = \frac{1}{3}$.

Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow a = 2\sqrt{17}$$

și apoi din Teorema sinusurilor $\sin C = \frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $m_{BC} = -\frac{1}{2}$, rezultă că ecuația dreptei GD este $y = 2x$. De asemenea, ecuația dreptei BC este $y = -\frac{1}{2}x + 2$ și dacă $\{E\} = GD \cap BC$ se obține că $E\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ și că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2019x^{2018} + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} 673x^{2016} = 673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obține $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f . În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4} dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \\ &= \pi \left(x\Big|_1^3 + 2 \ln(x^2+4)\Big|_1^3\right) = 2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} = \frac{x}{(x^2 + 7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2}$$

și cum $\frac{x}{(x^2 + 7)^2}$ este o funcție impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx &= \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2 + 7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2 + 7 - x^2}{(x^2 + 7)^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2 + 7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2 + 7)^2} dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{7}}{7} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)} \right)' dx \right] = \\ &= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7} \left(-\frac{x}{2(x^2+7)} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx \right) = \frac{\pi+2}{28}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 14.09.2019

A

1.(10p) Câte numere întregi are mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\} ?$$

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}.$$

- a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20 . \end{cases}$$

- a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$
 d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a^2+x^2 & b^2+x^2 & c^2+x^2 \\ a^3+x^3 & b^3+x^3 & c^3+x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

- a) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 b) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 c) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 d) $f'(x) = (b-a)(c-a)(b-c)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 e) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
 d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}.$$

- a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x - 1$. Să se determine $f'(0)$.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f .

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx.$$

- a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$
c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$
e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

- a) $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{1}{7}$ b) $a = -\frac{1}{17}, b = \frac{4}{17}$ c) $a = \frac{4}{17}, b = -\frac{4}{17}$
d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}, b = \frac{4}{7}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuația din enunț este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obține că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulțimea conține 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Frația din enunț poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = i^2 = -1.$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a \ b \ c)$ și atunci ecuația matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a \ b \ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obține că $a = 2$, $b = -1$ și $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2 \ -1 \ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = 2$, $y = -1$ și $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcția din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned}
 f(x) & \stackrel{C_2:=C_2-C_1}{C_3:=C_3-C_1} \left| \begin{array}{ccc} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{array} \right| \stackrel{C_3:=C_3-C_2}{=} \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c) + a^3 + x^3 - \\
 & \quad - (a+x)(b^2+ab+a^2) - (a^2+x^2)(a+b+c)],
 \end{aligned}$$

de unde se obține că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+ac+bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \frac{\pi}{6}$, de unde se obține că $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ și mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\frac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparține dreptei $y = 2x - 2$, pentru că

$$a+1 = 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{1} = 6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x) = 2e^x + 3$, rezultă că $f'(0) = 5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x = \frac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f .

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunț poate fi scrisă

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx = \int_7^{27} \frac{1}{\sqrt{2x - 5} \left(\frac{x}{\sqrt{2x - 5}} + 1 \right)} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x - 5} = t$, rezultă că $x = \frac{t^2 + 5}{2}$ și $\frac{1}{\sqrt{2x - 5}} dx = dt$, iar integrala devine

$$\begin{aligned} \int_3^7 \frac{1}{\frac{t^2 + 5}{2t} + 1} dt &= \int_3^7 \frac{2t}{t^2 + 2t + 5} dt = \int_3^7 \frac{2t + 2 - 2}{t^2 + 2t + 5} dt = \\ &= \int_3^7 \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 5} dt - 2 \int_3^7 \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt = \ln(t^2 + 2t + 5) \Big|_3^7 - 2 \int_3^7 \frac{1}{(t + 1)^2 + 4} dt = \\ &= \ln 68 - \ln 20 - \operatorname{arctg} \frac{t + 1}{2} \Big|_3^7 = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2 = \\ &= \ln \frac{17}{5} - (\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2) = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4 - 2}{1 + 4 \cdot 2} = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f , rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x) + e^{-x}(-4a \sin 4x + 4b \cos 4x) = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}[(-a + 4b) \cos 4x - (4a + b) \sin 4x] = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 4b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{17} \\ b = \frac{4}{17} \end{cases}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020

A

1.(7p) Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{și} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației

$$x^2 - x - a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{a) } E_1 = -\frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a} \qquad \text{b) } E_1 = \frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a}$$

$$\text{c) } E_1 = -\frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2} \qquad \text{d) } E_1 = \frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$$

$$\text{e) } E_1 = \frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$$

2.(8p) Amestecăm un pachet de 52 de cărți de joc și extragem simultan două cărți la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi ași de aceeași culoare?

a) $\frac{1}{51 \cdot 52}$ b) $\frac{1}{51 \cdot 26}$ c) $\frac{1}{51 \cdot 13}$ d) $\frac{C_4^2}{52}$ e) $\frac{A_4^2}{52}$

3.(9p) Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4.(8p) Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0, 1, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

c) $(0, 0, 1), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$ d) $(0, 0, 1), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$

e) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), (0, 0, 1)$

5.(7p) Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi și să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i, z = -1 + i$ b) $e = 1 + i, z = i$ c) $e = 1, z = 1 - 2i$

d) $e = 1 - i, z = i$ e) $e = -i, z = 2 - i$

6.(8p) Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

- a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

7.(8p) Se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-3, -4)$, $D(4, 3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanța de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8.(9p) Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) nu există e) 1

9.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

- a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

10.(8p) Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

- a) un punct de minim local
b) un punct de maxim local
c) două puncte de maxim local
d) două puncte de minim local
e) un punct de minim local și un punct de maxim local

11.(8p) Să se calculeze

$$\int (2x - 1) \cos 2x dx.$$

- a) $x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 c) $x \sin 2x + 2 (\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{4} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$
 d) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{10}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2020

1. Din relațiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 \cdot x_2 = -a^2$ și atunci

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{1 - 3(-a^2)}{(-a^2)^3} = -\frac{1 + 3a^2}{a^6} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} E_2^2 &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1 - 4(-a^2) = 1 + 4a^2, \end{aligned}$$

deci $E_2 = \sqrt{1 + 4a^2}$.

Răspuns corect: c).

2. Extrăgând simultan 2 cărți la întâmplare din pachetul de 52 de cărți de joc, numărul cazurilor posibile este C_{52}^2 . Cum cele două cărți trebuie să fie doi ași de aceeași culoare, ei pot fi 2 ași roșii sau 2 ași negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

3.

$$\begin{aligned} B \cdot A \cdot C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum $\text{rang } A = 2 = \text{rang } \overline{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale x, y și $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha, \end{cases}$$

de unde obținem

$$x = \frac{3 - 3\alpha}{4} \quad \text{și} \quad y = \frac{1 - \alpha}{4},$$

care înlocuite în relația $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ne conduc la ecuația $13\alpha^2 - 10\alpha - 3 = 0$ cu soluțiile:

$$\alpha_1 = 1 \implies x = 0, y = 0, z = 1$$

și

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \implies x = \frac{12}{13}, y = \frac{4}{13}, z = -\frac{3}{13}.$$

Răspuns corect: c).

5. Cum legea de compoziție din enunț poate fi scrisă

$$x * y = (x - i) \cdot (y - i) + i,$$

elementul neutru $e = i + 1$ se găsește ușor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $x * a = a * x = a$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ și obținem $a = i$.

În concluzie, $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5 = i$

Răspuns corect: b).

6. Cum $\sin a = \frac{3}{5}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a = -\frac{4}{5}$, de unde se obține că

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Răspuns corect: d).

7. Cum ecuația dreptei CD este $y = x - 1$, putem considera $P(a, a - 1) \in CD$, $a \in \mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$, deci $\operatorname{tg}(\widehat{APC}) = \operatorname{tg}(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left| \frac{m_{AP} - m_{CD}}{1 + m_{AP} \cdot m_{CD}} \right| = \left| \frac{m_{BP} - m_{CD}}{1 + m_{BP} \cdot m_{CD}} \right|$$

care ne conduce la ecuația

$$\left| \frac{a}{3 - a} \right| = 1 \iff a = \frac{3}{2} \implies P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \implies OP = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Răspuns corect: e).

8. Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulțim cu conjugata și obținem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obține ecuația $y = x$.

Răspuns corect: e).

10. Cum

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1}{x},$$

rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$ și strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru f .

Răspuns corect: a).

11. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \cos 2x dx &= \int (2x - 1) \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Căutăm o descompunere a fracției de forma:

$$\begin{aligned}\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} &= \frac{A(\sin x + 2 \cos x) + B(\sin x + 2 \cos x)'}{\sin x + 2 \cos x} = \\ &= \frac{A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} = \\ &= \frac{(A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x}{\sin x + 2 \cos x},\end{aligned}$$

de unde obținem, identificând coeficienții, că $A = \frac{4}{5}$ și $B = -\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5} dx - \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2 \cos x)'}{\sin x + 2 \cos x} dx = \\ &= \frac{4}{5} \cdot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2021

A

1.(7p) Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 1$, $m \in \mathbb{R}$, știind că punctul $A(-2, 3)$ aparține graficului ei.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

e) $f(x) = x^2 + x - 1$

2.(8p) Să se determine în care dintre următoarele intervale se află soluția pozitivă a ecuației

$$\log_7(x^2 - x + 1) = 1 .$$

- a) $[0, 2]$ b) $(2, 5)$ c) $[5, 7)$ d) $[1, 2)$ e) $(4, 6]$

3.(8p) Fie numerele reale a și b astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Să se calculeze $7a + 4b$.

- a) 2021 b) 0 c) 15 d) -9 e) 23

4.(7p) Se consideră matricele de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1 + 4m & 6m \\ -2m & 1 - 3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) .$$

Să se calculeze determinantul matricei $X(1)$.

- a) 3 b) -2 c) -10 d) 10 e) 2

5.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2 .$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 1 = 6$.

- a) -1 b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) $\frac{3}{2}$

6.(8p) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$. Să se calculeze $f'(0)$.

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

7.(8p) Să se determine distanța dintre dreptele paralele

$$d_1 : 5x + 12y - 11 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 : y = mx + 2, \quad m \in \mathbb{R}.$$

- a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) $\frac{3}{2}$

8.(10p) În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egal cu 116. Să se calculeze $\text{ctg } A + \text{ctg } B + \text{ctg } C$.

- a) $\frac{58\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{58\sqrt{15}}{15}$ c) $\frac{29\sqrt{15}}{15}$ d) $\frac{58\sqrt{15}}{9}$ e) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$

9.(9p) Fie funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - 2\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) nu există c) 0 d) -1 e) 2

10.(9p) Se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcției $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$, să se calculeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului ABC .

- a) 8 b) 4 c) $\sqrt{15}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{15}$

11.(8p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{și respectiv} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Să se determine primitiva H a funcției $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x) \cdot g^2(x)$ care verifică relația $H(0) = \frac{1}{8}$.

- a) $\frac{1}{8}[f(4x) - g(4x) + x]$ b) $\frac{1}{64}[f(4x) + 8x + 7]$
c) $\frac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4]$ d) $\frac{1}{64}[g(4x) + 4x + 8]$
e) $\frac{1}{32}[f(4x) + 4x + 3]$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1 + 2e^{-x}} dx.$$

a) $2 \ln(e^2 - 2)$

b) $\ln(e - 2) \cdot \ln(e^2 - 2)$

c) $\ln 2 \cdot \ln 3$

d) $4 \ln(e^2 - 2) - 3 \ln(e - 2) + e^2 - e$

e) $\ln(e - 2) - e^2 + e$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2021

1. Punctul $A(-2, 3)$ aparține graficului funcției $f(x) = x^2 + mx - 1$ dacă $f(-2) = 3$, de unde obținem $m = 0$, adică funcția $f(x) = x^2 - 1$

Răspuns corect: c).

2. Ecuația logaritmică este echivalentă cu ecuația $x^2 - x + 1 = 7$ care are soluția pozitivă $x = 3 \in (2, 5)$.

Răspuns corect: b).

3. Ecuația matriceală ne conduce la următoarele relații $a + 2b = -7$ și $b = -4$, de unde $7a + 4b = -9$.

Răspuns corect: d).

4. Cum

$$X(1) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det X(1) = -10 + 12 = 2$.

Răspuns corect: e).

5. Ecuația din enunț este echivalentă cu $3a = 2$, de unde avem că $a = \frac{2}{3}$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $f'(x) = e^x + e^x \cdot x$, rezultă că $f'(0) = e^0 = 1$.

Răspuns corect: a).

7. Fie $A(0, 2)$ un punct de pe dreapta d_2 . Distanța dintre cele două drepte paralele coincide cu

$$d(A, d_1) = \frac{|5x_A + 12y_A - 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|12 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{169}} = 1 .$$

Răspuns corect: d).

8. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \implies \sin A = \frac{6\sqrt{15}}{bc}$$

și atunci

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{6\sqrt{15}}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\sqrt{15}} .$$

Analog,

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\sqrt{15}} \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{12\sqrt{15}} ,$$

de unde obținem

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12\sqrt{15}} = \frac{116}{12\sqrt{15}} = \frac{29\sqrt{15}}{45} .$$

Răspuns corect: e).

9. Cum

$$[x] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 2, & \text{dacă } x \in [2, 3) , \end{cases}$$

rezultă că

$$f(x) = (x - [x])(1 - 2x + 2[x])^2 = \begin{cases} (x - 1)(3 - 2x)^2, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ (x - 2)(5 - 2x)^2, & \text{dacă } x \in [2, 3) \end{cases}$$

și atunci

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x - 1)(3 - 2x)^2 = 1$$

și

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - 2)(5 - 2x)^2 = 0,$$

de unde deducem că nu există $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $C(a, \sqrt{8a - a^2})$, $a \in [1, 5]$. Atunci, folosind intervalele de monotonie, aria $A_{\triangle ABC} = 2\sqrt{8a - a^2}$ are valoare minimă pentru $a = 1$, adică valoarea minimă pe care o poate lua aria triungiului ABC este $2\sqrt{7}$.

Răspuns corect: d).

11. Cum

$$h(x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x} - 2}{16},$$

rezultă că

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \mathcal{C}.$$

Dar $H(0) = \frac{1}{8}$, de unde obținem că $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$, adică

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \frac{1}{8} = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x + 8}{64} \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - 4x + 4 \right) = \frac{1}{32} [g(4x) - 4x + 4]. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &= \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - \frac{2}{e^x}} dx = \int_1^2 \frac{x \cdot e^x - e^{2x}}{e^x - 2} dx = \\
&= \int_1^2 \frac{x \cdot e^x}{e^x - 2} dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x - 2} dx = \\
&\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{e^x - 2} dx - \int_e^{e^2} \frac{t}{t - 2} dt = \\
&= \int_1^2 x \cdot [\ln(e^x - 2)]' dx - \int_e^{e^2} \frac{t - 2 + 2}{t - 2} dt = \\
&= x \cdot \ln(e^x - 2) \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(e^x - 2) dx - t \Big|_e^{e^2} - 2 \ln |t - 2| \Big|_e^{e^2} = \\
&= \ln(e - 2) - e^2 + e - \int_1^2 \ln(e^x - 2) dx.
\end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă $\ln(e^x - 2) = y$, rezultă că $x = \ln(e^y + 2)$, de unde $dx = \frac{e^y}{e^y + 2} dy$ și atunci integrala devine:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &= \ln(e - 2) - e^2 + e - \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y \cdot \frac{e^y}{e^y + 2} dy \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &+ \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y \cdot \frac{e^y}{e^y + 2} dy = \ln(e - 2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &+ \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x \cdot e^x}{e^x + 2} dx = \ln(e - 2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x \cdot e^x}{e^x(1 + 2e^{-x})} dx &= \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1 + 2e^{-x}} dx &= \ln(e-2) - e^2 + e. \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2021

A

1.(7p) Graficul cărei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de mai jos conține punctul $A(-1, 4)$?

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$

2.(8p) Să se calculeze

$$N = i + i^2 + i^3 + i^4.$$

a) $N = i$

b) $N = 0$

c) $N = -1$

d) $N = 1$

e) $N = -i$

3.(8p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = -1 \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

a) $(1, 0, -1)$

b) $(0, 1, 1)$

c) $(0, -1, -1)$

d) $(1, 1, 0)$

e) $(1, 1, 1)$

4.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5} \ln \frac{4}{9}$

b) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5} \ln \frac{4}{9}$

c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{8}{9}$

d) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln \frac{1}{9}$

e) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5} \ln \frac{8}{9}$

5.(9p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max \left\{ \cos x, \frac{1}{2} \right\} dx .$$

a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$

b) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

6.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Să se calculeze $B = A^2 - A$.

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.(7p) Pe mulțimea $G = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} .$$

Să se calculeze $N = 2 * 1$.

- a) $N = 1$ b) $N = 2$ c) $N = \sqrt{3}$ d) $N = 0$ e) $N = \sqrt{5}$

8.(8p) Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$.

- a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) 3

9.(9p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-2, 0\}$ c) $\{1, -1\}$
d) $\{1, -2\}$ e) $\{0, 1\}$

10.(8p) Să se calculeze

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

- a) $L = \frac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{6}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$

11.(10p) Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii dusă din A în $\triangle ABC$. Să se calculeze $S = m + n$.

- a) $S = -3$ b) $S = 2$ c) $S = -1$ d) $S = 0$ e) $S = 4$

12.(8p) Să se calculeze $\sin x$, știind că $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2021

1. Graficul funcției $f(x) = x^2 - 2x + 1$ conține punctul $A(-1, 4)$, pentru că $f(-1) = 4$.

Răspuns corect: d).

2. $N = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$.

Răspuns corect: b).

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = 1$, $y = 0$ și $z = -1$.

Răspuns corect: a).

4. Căutăm o descompunere a fracției de forma:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} &= \frac{A(2 \sin x + \cos x) + B(2 \sin x + \cos x)'}{2 \sin x + \cos x} = \\ &= \frac{A(2 \sin x + \cos x) + B(2 \cos x - \sin x)}{2 \sin x + \cos x} = \\ &= \frac{(2A - B) \sin x + (A + 2B) \cos x}{2 \sin x + \cos x}, \end{aligned}$$

de unde obținem, identificând coeficienții, că $A = \frac{4}{5}$ și $B = \frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5} dx + \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + \cos x)'}{2 \sin x + \cos x} dx = \\&= \frac{4}{5} \cdot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\&= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

5. Cum $\cos x = \frac{1}{2}$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$, integrala din enunț devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max \left\{ \cos x, \frac{1}{2} \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Răspuns corect: d).

6.

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\&= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

7. $N = 2 * 1 = \sqrt{2^2 \cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 + 2} = \sqrt{4 - 4 - 1 + 2} = 1$.

Răspuns corect: a).

8. Cum $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$, rezultă că $f'(1) = 2 + 1 = 3$.

Răspuns corect: e).

9. Cum $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$ se anulează în -2 și 0 , folosind monotonia funcției deducem că mulțimea punctelor de extrem local este $\{-2; 0\}$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l' Hospital de 2 ori se obține

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: c).

11. Cum panta dreptei BC este 1, rezultă că panta înălțimii din A este -1 și atunci ecuația ei este $y = -x + 5$, de unde $m = -1$ și $n = 5$, deci $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

12. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\sin^2 x = \frac{2}{3}$.

Ținând cont de intervalul dat se obține $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 14.07.2022

A

1.(8p) Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai lungă bucată?

- a) 61 cm b) 67 cm c) 70 cm d) 73 cm e) 79 cm

2.(8p) Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obținem suma punctelor 5?

- a) $\frac{1}{108}$ b) $\frac{1}{72}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{6}$

3.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2022 \end{pmatrix}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

4.(9p) Să se determine numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac condițiile

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) o infinitate

5.(8p) Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2),$$

unde pentru $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Să se determine modulul simetricului elementului $z = 2 + i$ în raport cu această lege.

- a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) 1 e) $2\sqrt{5}$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) -1

7.(7p) Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei duse din A în triunghiului ABC . Să se calculeze $m + n$.

- a) -6 b) -4 c) 0 d) 4 e) 6

8.(9p) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x .$$

- a) $y = -2023x + \frac{1}{2}$ b) $y = -2023x - \frac{1}{2}$ c) $y = -2021x - 2$
d) $y = -2021x$ e) $y = -2022x$

9.(7p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 5x - 9$ b) $y = 6x - 10$ c) $y = -6x + 2$
d) $y = 6x - 2$ e) $y = 4x - 8$

10.(10p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1 - mx)e^x \leq 1 ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\{-1\}$

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos(2x) \, dx .$$

- a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi-1}{2}$

12.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx .$$

- a) $\frac{40}{3}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $\frac{40}{9}$

SOLUȚII AC Iulie 2022

1. Observăm că lungimile celor 10 bucăți reprezintă primii zece termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de rație $r = 6 \text{ cm}$ și suma $S_{10} = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$. Obținem că $a_1 = 13 \text{ cm}$ și $a_{10} = 67 \text{ cm}$.

Deci, cea mai lungă bucată are 67 cm .

Răspuns corect: b).

2. Cum la aruncarea a trei zaruri numărul cazurilor posibile este 6^3 și în doar șase dintre ele suma punctelor este 5, adică în cazurile:

$$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) ,$$

rezultă că probabilitatea cerută este $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

Răspuns corect: c).

3. Deoarece determinantul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2022 \end{vmatrix}$$

este nenul, rezultă că $\text{rang } A = 3$.

Răspuns corect: d).

4. Din ecuația matriceală din enunț obținem sistemul

$$\begin{cases} 3a + c = a + b \\ 3b + d = a + b \\ a + 3c = c + d \\ b + 3d = c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ a + 2c - d = 0 \\ b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

care are matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 0$ și

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

nenul, deci $\text{rang } A = 3$. Cum sistemul este omogen, rezultă că el este compatibil nedeterminat cu a , b , c necunoscute principale și d necunoscută secundară, primele trei ecuații sunt principale și ultima e secundară, deci avem sistemul

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b = -d \\ a + 2c = d \end{cases}$$

cu soluția $a = -d$, $b = -d$ și $c = d$, care înlocuită în relația $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$, ne conduce la $d = \pm \sqrt{\frac{2022}{4}}$, adică două matrice.

Răspuns corect: c).

5. Cum elementul neutru al legii de compoziție date este 1, simetricul lui $z = 2 + i$ îl găsim rezolvând ecuația $z \perp z' = 1$, de unde rezultă $z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ cu modulul $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Răspuns corect: a).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei obținem că $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, de unde rezultă că $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și atunci $\sin 2x = -1$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului BC atunci $M(1, 4)$ și ecuația lui AM este $y = -x + 5$, deci $m = -1$ și $n = 5$, adică $m + n = 4$.

Răspuns corect: d).

8. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, rezultă că f nu are asimptotă orizontală la $-\infty$, deci căutăm asimptotă oblică la $-\infty$. Avem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2022 \right)}{x} = -2023 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2023x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

deci $y = -2023x + \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 6$, se obține $y = 6x - 10$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - mx)e^x$. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de maxim local pentru f . Cum f este derivabilă în $x = 0$, rezultă conform teoremei lui Fermat, că $f'(0) = 0$.

Dar $f'(x) = -me^x + (1 - mx)e^x$ cu $f'(0) = -m + 1$, de unde se obține $m = 1$ care satisface condiția problemei.

Răspuns corect: c).

11. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \\ &= (\pi - 1) \cdot \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\sin 0}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot x^3 dx = \frac{2}{3} \int_0^2 (\sqrt{1+x^3})' \cdot x^3 dx = \\ &= \frac{2}{3} \left(x^3 \sqrt{1+x^3} \Big|_0^2 - \int_0^2 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx \right) \stackrel{1+x^3=t}{3x^2 dx=dt} \\ &= \frac{2}{3} \left(24 - \int_1^9 \sqrt{t} dt \right) = \frac{2}{3} \left(24 - \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_1^9 \right) = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 17.07.2023**A**

1.(7p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și $g(x) = 3x - 1$. Să se determine suma soluțiilor ecuației $(f \circ g)(x) = 0$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 9 e) -9

2.(8p) Fie numărul complex z care verifică ecuația

$$\bar{z} + |z| = 2 + 8i.$$

Să se determine $|z|$.

- a) 289 b) 15 c) 8 d) 23 e) 17

3.(9p) La o ședință cu părinții participă șapte doamne și opt domni, printre care doamna X și domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei doamne și patru domni, știind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

- a) 277200 b) 1925 c) 525 d) 2450 e) 5040

4.(10p) Fie (x_0, y_0, z_0) o soluție nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea raportului

$$\frac{x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

- a) $\frac{37}{75}$ b) $-\frac{47}{75}$ c) 0 d) $-\frac{37}{75}$ e) $\frac{47}{75}$

5.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 5

6.(7p) Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

- a) $(X + \widehat{4})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ b) $(X + \widehat{4})(X + \widehat{2})(X^2 + \widehat{1})$
 c) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})(X^2 + \widehat{1})$ d) $(X + \widehat{2})^2(X^2 + X + \widehat{1})$
 e) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{4})(X^2 + X + \widehat{1})$

7.(8p) Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}$, $\vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a + b$.

- a) -2 b) 2 c) 0 d) -1 e) 1

8.(9p) Să se calculeze diatanța de la $O(0, 0)$ la simetricul punctului $A(4, 2)$ față de punctul $B(-1, 1)$.

- a) $2\sqrt{5}$ b) 2 c) $3\sqrt{10}$ d) $\sqrt{2}$ e) 6

9.(8p) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

- a) $y = -x - 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$
 d) $y = 1 - x$ e) $y = -x$

10.(8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2\sqrt{x}$$

în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

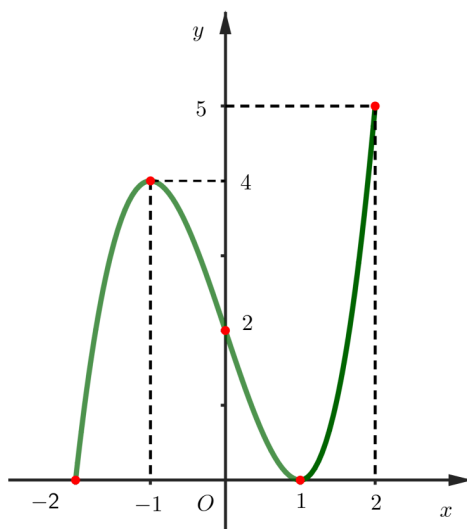
- a) $y = 5x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = 2x + 1$
 d) $y = 3x + 2$ e) $y = 5 - 2x$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x} dx.$$

- a) $\frac{1}{2e^2}$ b) $\frac{1}{e^2} + 1$ c) $-\frac{1}{6e^2}$ d) $-\frac{1}{2e^2}$ e) $-\frac{1}{e^2} - 1$

12.(10p) Graficul unei primitive F a unei funcții continue $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ este dat în figura de mai jos. Câte dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?



(i) $F'(1) = f(1)$ (ii) $f(1) = F(1)$ (iii) $\int_0^2 f(x) dx = 3$

(iv) $\int_{-1}^0 f(x) \cdot F(x) dx = -6$ (v) $f(x) \leq 0, \forall x \in (-1, 1)$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUȚII AC Iulie 2023

1. Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = 9x^2 - 9x + 2$. Atunci suma soluțiilor ecuației $9x^2 - 9x + 2 = 0$ este $x_1 + x_2 = 1$.

Răspuns corect: b).

2. Notăm $z = a + ib$, de unde $\bar{z} = a - ib$ și $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ecuația devine

$$a - ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i.$$

Prin identificarea părților reale, respectiv imaginare obținem sistemul

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Rezultă $\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$ cu $2 - a \geq 0$. Prin ridicare la pătrat găsim $a = -15$ și în final $|z| = 17$.

Răspuns corect: e).

3. Dintr-un grup de n persoane se pot alege k persoane în C_n^k moduri. Atunci, fără restricții, ar fi C_7^3 moduri de a alege doamnele și C_8^4 moduri de a alege domnii. Conform "regulii produsului", avem $C_7^3 \cdot C_8^4$ moduri de a forma comitetul respectiv (fără restricții). Din acest număr vom scădea cazurile "nefavorabile", adică cele în care doamna X și domnul Y fac parte din comitet: $C_6^2 \cdot C_7^3$ (deoarece mai rămân de ales două doamne din șase și trei domni din restul de șapte). Rezultă 1925 de moduri.

Răspuns corect: b).

4. Notăm $z = z_0$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 2y = -z_0 \\ x - 3y = -2z_0 \end{cases}.$$

Reducem pe x și găsim $y_0 = \frac{z_0}{5}$, apoi $x_0 = -\frac{7z_0}{5}$, ce verifică ecuația nefolosită.

Prin înlocuirea în expresie obținem $-\frac{37}{75}$.

Răspuns corect: d).

5. Minorul de ordinul 3 format din primele două coloane și ultima coloană este nenul, deci rangul matricei este 3.

Răspuns corect: c).

6. Folosind schema lui Horner, verificăm dacă elementele lui $\mathbb{Z}_5$ sunt rădăcini ale polinomului dat. Găsim că doar $\hat{1}$ și $\hat{3}$ sunt rădăcini. Mai mult, rezultă descompunerea

$$f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X^2 + X + 1) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X^2 + X + 1),$$

unde $X^2 + X + 1$ este ireductibil deoarece este polinom de gradul doi fără rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Răspuns corect: e).

7. Avem

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 - b)\vec{i} + (a + 5)\vec{j}.$$

Prin identificarea cu coordonatele lui $\vec{w}$ obținem condițiile

$$1 - b = 2a + 4, \quad a + 5 = -4b.$$

Rezultă $a = -1, b = -2$, deci $a + b = -2$.

Răspuns corect: a).

8. Folosind formula mijlocului unui segment obținem că simetricul lui A față de B este punctul $C(-6, 0)$. Atunci $OC = 6$.

Răspuns corect: e).

9. Folosind că $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pentru $x < 0$, avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = \infty(2 - 1) = \infty,$$

deci nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Căutăm asimptota oblică $y = mx + n$, unde

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)}{x} = -1, \\
 n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{4 + 1/x^2} + 2 \right)} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \left(\sqrt{1 + 2/x} + 1 \right)} \\
 &= 0 + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Rezultă $y = -x + 1$.

Răspuns corect: d).

10. Avem $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Panta tangentei este $m = f'(1) = 2$. Cum $f(1) = 3$, ecuația tangentei va fi $y - 3 = 2(x - 1)$, adică $y = 2x + 1$.

Răspuns corect: c).

11. Folosim de două ori formula de integrare prin părți cu

$$\int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2}, \text{ adică } e^{-2x} = -\frac{1}{2}(e^{-2x})'$$

Avem

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x} dx &= (x^2 - x) \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \left((2x - 1) \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2e^2}.
 \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Avem:

(i) Adevărat din definiția primitivei.

(ii) $x = 1$ este punct de minim al funcției derivabile F . Din Teorema lui Fermat rezultă că $F'(1) = 0$, deci $f(1) = 0$. Mai mult, din grafic, $F(1) = 0$. Deci adevărat.

(iii) $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 5 - 2 = 3$, deci adevărat.

(iv) $\int_{-1}^0 f(x) \cdot F(x) dx = \int_{-1}^0 F'(x) \cdot F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} (2^2 - 4^2) = -6$; adevărat.

(v) Pe intervalul $(-1, 1)$ funcția F este descrescătoare, deci $F'(x) \leq 0$, adică $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Astfel și ultima afirmație este adevărată.

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2024

A

1.(8p) O parabolă $y = x^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(-1, 2)$. Calculați $b + c$.

- a) 0 b) 1 c) 5 d) 2 e) 3

2.(8p) Dacă numărul complex z satisface relația

$$|z - i|^2 + |z - 2i|^2 = |z - 3i|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Dacă $A^{-1} = \alpha A + \beta I_2$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar I_2 este matricea unitate, atunci valoarea raportului $\frac{\beta}{\alpha}$ este

- a) 6 b) -6 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{6}$ e) 0

4.(10p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$$

Care dintre următoarele relații este verificată de toate soluțiile sistemului?

a) $2x^2 - y^2 - z^2 - 4z = 2$

b) $x + y + z = 1$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $x + y^2 - z^2 = 1$

e) $x^2 + y + z^2 = 4z + 1$

5.(8p) Fie polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - X - 5$ și $g = X^2 + 1$. Determinați câtul c și restul r ale împărțirii lui f la g .

a) $c = X + 2, r = 0$

b) $c = X^2 + 1, r = X + 2$

c) $c = X + 2, r = -2X - 7$

d) $c = -2X - 7, r = X + 2$

e) $c = X + 1, r = -2$

6.(8p) Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că $M(1, 1)$, $N(5, -1)$, $P(3, 5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$

b) $12\sqrt{5}$

c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$

e) $8\sqrt{5} + 12$

f) $6\sqrt{5} + 14$

7.(9p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + 2x + 3$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x + 6$

b) $y = x - 6$

c) $y = 3x + 4$

d) $y = x + 4$

e) $y = 3x - 6$

8.(7p) Calculați limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^1 + nC_n^2 + n^2C_n^3 + \cdots + n^{n-1}C_n^n}{C_{n-1}^0 + (n-1)C_{n-1}^1 + (n-1)^2C_{n-1}^2 + \cdots + (n-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}}.$$

a) 0

b) $\frac{1}{e}$

c) 1

d) e

e) ∞

9.(9p) Determinați mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația $e^{x^2} - mx = 0$ are două soluții reale și distincte.

- a) $\emptyset$ b) $(-\sqrt{2e}, \sqrt{2e})$ c) $(-\infty, 0)$
d) $[-\sqrt{2e}, \sqrt{2e}]$ e) $(-\infty, -\sqrt{2e}) \cup (\sqrt{2e}, \infty)$

10.(8p) Calculați $\int_1^e (2x + 1) \ln x \, dx$.

- a) $\frac{e^2 + 3}{2}$ b) $\frac{e + 3}{2}$ c) $\frac{e^2 - 2}{2}$ d) $\frac{e^2 + 1}{2}$ e) $\frac{e + 1}{2}$

11.(7p) Determinați valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c) \operatorname{arctg} x$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

- a) $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$
d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

12.(10p) Câte numere de 7 cifre conțin exact o cifră de 1, exact două cifre de 2 și exact trei cifre de 3?

- a) 420 b) 2880 c) 2940 d) 3780 e) 20160

SOLUȚII AC Iulie 2024

1. Parabola dată este graficul funcției de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + c$.

Avem $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1$, deci $b = 2$. Apoi $f(-1) = 1 - b + c = 2$, de unde $c = 3$. Rezultă $b + c = 5$.

Răspuns corect: c).

2. Notăm $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, deci $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Calculând modulele, relația dată în enunț devine

$$a^2 + (b - 1)^2 + a^2 + (b - 2)^2 = a^2 + (b - 3)^3.$$

Rezultă $a^2 + b^2 = 4$, deci $|z| = 2$.

Răspuns corect: b).

3. Avem $\text{tr}(A) = 6$ și $\det(A) = 8$. Atunci relația Cayley-Hamilton devine $A^2 = 6A - 8I_2$. Înmulțim cu A^{-1} și avem $A = 6I_2 - 8A^{-1}$, de unde

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}A + \frac{6}{8}I_2.$$

Astfel $\alpha = -\frac{1}{8}$ și $\beta = \frac{6}{8}$, iar $\frac{\beta}{\alpha} = -6$.

Răspuns corect: b).

4. Notăm $z = t$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 4y = 1 - 3t \\ 2x - y = 2 + 3t \\ 3x + 2y = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 8y = -2 + 6t \\ 2x - y = 2 + 3t \\ 3x + 2y = 3 + t \end{cases}$$

Reducem pe x din primele două ecuații și găsim $y = -t$, apoi $x = 1 + t$. Ultima ecuație devine $3 + t = 3 + t$, deci sistemul are o infinitate de soluții $(x, y, z) = (1 + t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Prin înlocuirea în expresiile date, obținem că soluțiile găsite verifică relația de la a).

Răspuns corect: a).

5. Efectuăm împărțirea ca mai jos și obținem câtul $X + 2$ și restul $-2X - 7$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 2X^2 & -X - 5 \\ -X^3 & -X \\ \hline 2X^2 - 2X - 5 & \\ -2X^2 & -2 \\ \hline -2X - 7 & \end{array} \begin{array}{l} X^2 + 1 \\ X + 2 \end{array}$$

Răspuns corect: c).

6. Deoarece punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului, MN , NP , PM sunt linii mijlocii. Atunci perimetrul triunghiului ABC este dublul

perimetrului triunghiului MNP . Folosim formula distanței dintre două puncte și obținem $MN = 2\sqrt{5}$, $NP = 2\sqrt{10}$, $PM = 2\sqrt{5}$.

Răspuns corect: c).

7. Avem $f'(x) = -e^{-x} + 2$. Panta tangentei este $m = f'(0) = 1$. Cum $f(0) = 4$, ecuația tangentei va fi $y - 4 = 1(x - 0)$, adică $y = x + 4$.

Răspuns corect: d).

8. Folosim binomul lui Newton. Avem

$$\begin{aligned}(1+n)^n &= 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \cdots + C_n^n n^n \\ &= 1 + n(C_n^1 + nC_n^2 + n^2C_n^3 + \cdots + n^{n-1}C_n^n),\end{aligned}$$

adică la numărătorul limitei avem $\frac{(1+n)^n - 1}{n}$. La numitor este exact dezvoltarea $[1 + (n-1)]^{n-1} = n^{n-1}$, deci limita devine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^n - 1}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n^n} \right) = e - 0 = e.$$

Răspuns corect: d).

9. Observăm că $x = 0$ nu este soluție a ecuației și împărțim la x . Ecuația devine $\frac{e^{x^2}}{x} - m = 0$. Vom folosi șirul lui Rolle pentru ecuațiile $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$, unde

$$f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{x^2}}{x} - m,$$

respectiv

$$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{x^2}}{x} - m.$$

Avem

$$f'(x) = g'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2},$$

care egalat cu 0 dă soluțiile $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mai mult,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(x_1) = -\sqrt{2}e - m, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty, g(x_2) = \sqrt{2e} - m, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Rezultă șirul lui Rolle pentru $f(x) = 0$:

$$-, \operatorname{semin}(-\sqrt{2e} - m), -,$$

respectiv șirul lui Rolle pentru $g(x) = 0$:

$$+, \operatorname{semin}(\sqrt{2e} - m), +.$$

Deducem că ecuația dată are exact două soluții reale și distincte dacă și numai dacă $(-\sqrt{2e} - m)(\sqrt{2e} - m) > 0$.

Răspuns corect: e).

10. Folosim formula de integrare prin părți:

$$\begin{aligned} \int_1^e (2x + 1) \cdot \ln x \, dx &= \int_1^e (x^2 + x)' \cdot \ln x \, dx \\ &= (x^2 + x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x^2 + x) \frac{1}{x} \, dx \\ &= (e^2 + e) \ln e - (1^2 + 1) \ln 1 - \int_1^e (x + 1) \, dx \\ &= e^2 + e - 0 - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^e = e^2 + e - \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{e^2 + 3}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

11. Funcția F este derivabilă. Pentru a fi primitiva lui f mai trebuie ca $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică

$$a + b + 2bx \operatorname{arctg} x + \frac{c - b}{x^2 + 1} = x \operatorname{arctg} x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă condițiile $c - b = 0, 2b = 1, a + b = 0$, de unde $b = c = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

12. Observăm că exact o cifră a unui număr cu proprietatea din enunț nu este 1,2 sau 3. Reformulăm problema astfel: "Câte numere de 7 cifre conțin exact o cifră de 1, exact două cifre de 2, exact trei cifre de 3 și exact încă o cifră din mulțimea $M = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?"

Atunci există $C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = 420$ modalități pentru fiecare alegere a cifrei din mulțimea M , adică $420 \cdot 7 = 2940$ aranjări de cifre cu proprietatea cerută, dintre care $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 60$ încep cu 0. Rezultă că vor fi $2940 - 60 = 2880$ numere.

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 09.07.2025

A

1.(8p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \text{ și } g(x) = 3x - 1.$$

Să se calculeze $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x(x^2 - x)$ c) $(3x - 1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$

2.(9p) Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin exact un număr impar?

- a) 25 b) 16 c) 32 d) 64 e) 160

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(9p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 6

5.(10p) Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât polinomul $f = X^{2025} + 2X + m$ să se dividă cu $X + 1$.

- a) -2025 b) -3 c) 0 d) 3 e) 1

6.(8p) Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\operatorname{tg} a$ este egală cu:

- a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ e) $-\frac{4}{3}$ f) -1

7.(10p) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2025} - 1}{x - 1}$

- a) 0 b) 1 c) 2025 d) -2025 e) -1

8.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$

9.(8p) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 2 \\ ax, & x > 2 \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

- a) 2 b) 4 c) 0 d) -1 e) -2

10.(7p) Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x} \cos \pi x \, dx.$$

a) $\frac{3(1+e^{-3})}{9+\pi^2}$

b) $\frac{2(1+e^2)}{4+\pi^2}$

c) $\frac{1+e^{-3}}{9+\pi^2}$

d) $\frac{1+e^3}{4+\pi^2}$

e) $\frac{2(1+e^3)}{9+\pi^2}$

11.(8p) Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) și $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanță de A se intersectează dreptele MN și BC ?

a) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

c) $\sqrt{10}$

d) $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

e) $\frac{7\sqrt{10}}{5}$

12.(7p) Să se determine volumul corpului de rotație generat de graficul funcției

$$f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}.$$

a) $\pi \left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$

b) $\pi \left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$

c) $\pi \left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$

d) $\pi \left(\ln \frac{3}{4} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$

e) $\pi \left(3\sqrt{7} + \ln \frac{3}{4} \right)$

SOLUȚII AC Iulie 2025

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = (3x-1)^2 - (3x-1) = 9x^2 - 9x + 2.$

Răspuns corect: a).

2. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \cup B$, unde $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Trebuie să formăm mulțimi în felul următor: un singur element din A (impar) și orice combinație de elemente din B , inclusiv mulțimea vidă. Atunci avem 5 posibilități pentru elementul impar și $2^5 = 32$ posibilități pentru combinații de elemente din B (numărul submulțimilor lui B). Conform regulii produsului obținem 160 de submulțimi.

Răspuns corect: e).

3. Matricea X are o linie și 3 coloane. Prin verificare directă obținem soluția.

Răspuns corect: d).

4. Observăm că minorul $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, deci rangul este 2.

Răspuns corect: c).

5. Condiția de divizibilitate se reduce la $f(-1) = 0$, adică $-1 - 2 + m = 0$. Deci $m = 3$.

Răspuns corect: d).

6. Din $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ obținem $\cos^2 a = \frac{16}{25}$ și $\cos a = -\frac{4}{5}$, deoarece a este în cadranul 2. Atunci $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{3}{4}$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind regula lui l'Hospital, limita se reduce la $\lim_{x \rightarrow 1} 2025x^{2024} = 2025$.

Răspuns corect: c).

8. Ecuația $f'(x) = 0$, unde $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$, are soluțiile -1 și 1 . Funcția este crescătoare pe $(-\infty, -1)$, apoi descrescătoare pe $(-1, 1)$ și din nou crescătoare pe $(1, \infty)$. Rezultă că $x = -1$ este punct de maxim local și $x = 1$ este punct de minim local.

Răspuns corect: d).

9. f este continuă în $x = 2$ dacă și numai dacă $l_s(2) = l_d(2) = f(2)$, unde $l_s(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + a) = 4 + a$ și $l_d(2) = \lim_{x \rightarrow 2} ax = 2a$. Obținem condiția $4 + a = 2a$ și $a = 4$.

Răspuns corect: b).

10. Notăm cu I integrala dată și folosim integrarea prin părți de două ori. Mai întâi avem

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-3x} (\sin \pi x)' dx = \frac{1}{\pi} e^{-3x} \sin \pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (-3) e^{-3x} \sin \pi x dx \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^1 e^{-3x} \sin \pi x dx = -\frac{3}{\pi^2} \int_0^1 e^{-3x} (\cos \pi x)' dx. \end{aligned}$$

Apoi

$$I = -\frac{3}{\pi^2} e^{-3x} \cos \pi x \Big|_0^1 + \frac{3}{\pi^2} \int_0^1 (-3) e^{-3x} \cos \pi x dx = \frac{3(1 + e^{-3})}{\pi^2} - \frac{9}{\pi^2} I.$$

Rezultă $I(\pi^2 + 9) = 3(1 + e^{-3})$.

Răspuns corect: a).

11. Considerăm sistemul cartezian de axe de coordonate cu originea în A , axa Ox fiind dreapta AB , iar axa Oy dreapta AD . Atunci avem $M(3, 0)$, $N(2, 3)$, $B(6, 0)$, $C(3, 3)$. Obținem ecuația dreptei MN : $y = -3x + 9$ și ecuația dreptei BC : $y = -x + 6$. Rezolvăm sistemul de intersecție al celor două drepte și găsim punctul $P(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$. Distanța de la $A(0, 0)$ la P este $\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{9}{2})^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Răspuns corect: b).

12. $V = \pi \int_0^6 \sqrt{7 - x^2 + 6x} dx = \pi \int_0^6 \sqrt{16 - (x - 3)^2} dx$. Cu schimbarea de variabilă $x - 3 = t$ obținem $V = \pi \int_{-3}^3 \sqrt{16 - t^2} dt = 2\pi \int_0^3 \sqrt{16 - t^2} dt$, folosind

paritatea funcției integrate. Apoi folosim integrarea prin părți:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^3 \sqrt{16-t^2} dt = \int_0^3 (t)' \sqrt{16-t^2} dt = t\sqrt{16-t^2} \Big|_0^3 - \int_0^3 t \frac{-t}{\sqrt{16-t^2}} dt \\
 &= 3\sqrt{7} - \int_0^3 \frac{16-t^2-16}{\sqrt{16-t^2}} dt = 3\sqrt{7} - \int_0^3 \frac{16-t^2}{\sqrt{16-t^2}} dt - \int_0^3 \frac{-16}{\sqrt{16-t^2}} dt \\
 &= 3\sqrt{7} - \int_0^3 \sqrt{16-t^2} dt + 16 \arcsin \frac{t}{4} \Big|_0^3 = 3\sqrt{7} - I + 16 \arcsin \frac{3}{4},
 \end{aligned}$$

de unde $2I = 3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4}$. Apoi găsim $V = 2\pi I$.

Răspuns corect: c).

Bibliografie

- [1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruta, D. Rendi, I. Mihuț, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învățământul superior*, Editura Politehnica, 2010.
- [2] Gh. Cenușă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Șerban, O. Vegheș, *Admitere ASE București, Teste grilă și autoevaluare, 2005-2008*, Editura Cison, București.
- [3] P. Găvruta, I. Golet, D. Păunescu, C. Arieșanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Țigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrișor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat și admiterea în Universitatea Politehnica Timișoara*, Editura Politehnica Timișoara, 2013.
- [4] Gh. Gussi, O. Stănășilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, R.A. București, 1994.
- [5] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didactică și Pedagogică, 1978.
- [6] C. Ionescu-Țiu, L. Pîrșan *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, București, 1975.
- [7] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.
- [8] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicații*, Editura Albatros, 1987.
- [9] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

- [10] V. Radu, *Teme și probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.
- [11] *Gazeta Matematică*.
- [12] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educației Naționale*.
- [13] *Probleme date la olimpiade și concursuri de matematică*.
- [14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educației Naționale*.

